Operadores Maximais Definindo Espaços de Funções e Aplicações

por

Shiyuiti Miyata

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Operadores Maximais Definindo Espaços de Funções e Aplicações

por

Shiyuniti Miyata

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília como parte dos requisitos para obtenção do grau de

Mestre em Matemática

em 19 julho de 1993

Comissão Julgadora:

Roberto Oscar Gandulfo - Orientador

Sérgio Antônio Tozoni - Membro

José Valdo Abreu Gonçalves - Membro

Resumo

Nesta dissertação descrevemos os espaços de DeVore-Sharpley definidos utilizando vários operadores maximais.

Diversas imersões são obtidas para tais espaços e fazemos comparações com espaços de Sobolev, Besov, Lipschitz e BMO.

Incluímos, como aplicações, a utilização de operadores maximais para verificar a regularidade local de funções e a relação com diferenciação de funções.

Abstract

In this work we describe several spaces as definied by DeVore-Sharpley by making use of different maximal functions.

Several embbeddings are obtained for these spaces and they are also compared with Sobolev, Besov, Lipschitz and BMO spaces, showing the local smoothness of functions in terms of maximal function operators.

Some results on differentiation are also included.

A MATEMATICA POSSUI UMA FORCA MARAVILHOSA

CAPAZ DE NOS FAZER COMPREENDER

MUITOS MISTERIOS DA NOSSA FE.

São Gerônimo

À memória de meus avós e

à juventude dos sobrinhos

Danilo, Carina e Mila.

Agradecimentos

A Deus.

Ao professor Roberto Oscar Gandulfo, pela orientação, paciência, sugestões e atenção dispensada na elaboração desta dissertação.

Aos professores do Departamento de Matemática da UnB, pelo esforço em formar profissionais e estimular a atualização e a divulgação de conhecimentos.

Aos funcionários do Departamento de Pós-Graduação de Matemática da UnB pelo apoio à parte administrativa e auxílio na digitação.

À Catarina (*Tata*) pelo carisma e espírito em estimular os Pai-Nossos de toda manhã no Laboratório de Fitopatologia do Instituto Agronômico do Paraná. Aos engenheiros agrônomos José Gomes, Laura, Paulo, Correia, Ernani e funcionários da Climatologia, Fitopatologia, Solos, Biometria, Biblioteca ...

Aos colegas do curso de mestrado e do alojamento estudantil: Aida, Alba, Ana Amélia, Ana Cristina, Ana Lúcia, Dilma, Edison, Maricelma, Marina, Marinêz, Luis Renato, Rose, Rosana (*in memorian*), Valéria, Vicente, pelo espírito de camaradagem e carinho.

Aos amigos Rubens Robles Ortega e Daniel pelas palavras de incentivo e confiança.

Aos educadores da cidade de Uraí (Pr) pela dedicação e amor ao ensino; em especial aos professores Antônio J. Ribas, Neusa M. Ribas e Maria Inêz H. Nardin.

À professora Jukie Kyosen, pela confiança.

Finalizando, à minha família, tios, primos, ... pela capacidade de superar dificuldades e pelos esforços dedicados para com as próximas gerações.

Indice

Apresentação i

Capítulo 1 **Resultados Básicos** 1

1.1 Preliminares
1.2 Desigualdades Tipo Hardy
1.3 Desigualdade de Markov Clássica
1.4 Desigualdades para Polinômios
1.4.1 Desigualdade de Gagliardo
1.5 Três Tipos de Funções e o Espaço de Lorentz
1.5.1 Função Distribuição
1.5.2 Função Rearranjo Não Crescente
1.5.3 Função Rearranjo Maximal
1.5.4 Espaço de Lorentz
1.6 Diferenciação de Integrais e Função Maximal de Hardy-Littlewood
1.6.1 Diferenciação de Integrais
1.6.1.1 Propriedades de Diferenciação
1.6.1.2 Propriedades de Cobertura
1.6.1.3 Teorema de Diferenciação de Lebesgue Clássico
1.6.2 Função Maximal
1.6.2.1 Operador Maximal
1.7 Aplicação
1.7.1 Espaço de Zygmund e Operador Maximal

Capítulo 2 **Teoria Maximal em $L^1_{loc}(\Omega)$** 32

2.1 Projeções
2.2 Função Maximal em $L^1_{loc}(\Omega)$
2.3 Funções Maximais Definindo Espaços Regulares
2.4 Aplicações
2.4.1 Funções Maximais Medindo Regularidade Local
2.4.2 Resultados Tipo Diferenciação de Lebesgue

Capítulo 3 **Teoria Maximal em $L^q_{loc}(\Omega)$** 49

3.1 Aproximantes
3.1.1 Aproximantes em Espaços Normados
3.1.2 Aproximantes em Espaços Métricos
3.2 Função Maximal em $L^q_{loc}(\Omega)$, $0 < q < \infty$
3.3 Aplicações
3.3.1 Operador Maximal de A. P. Calderón
3.3.2 Derivadas de Peano
3.3.3 Equivalência entre $F^b_{\alpha,q}$ e N^α_q
3.3.4 Mais Teoremas Tipo Diferenciação de Lebesgue

Capítulo 4 **Espaços Regulares , C^α_p e $\mathcal{C}^\alpha_p$** 69

4.1 Espaço de Sobolev
4.2 Espaços de Besov
4.3 Espaços de Lipschitz
4.4 A Imersão $C^\alpha_p(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^\alpha_p(\Omega)$
4.5 O Espaço $C^0_p(\Omega)$ com $1 \geq p \geq \infty$

Capítulo 5 **Imersões no Espaço de Besov** 89

5.1 As Imersões $B^{\alpha,p}_p(R^n) \hookrightarrow C^\alpha_p(R^n) \hookrightarrow B^{\alpha,\infty}_p(R^n)$
5.1.1 Otimalidade da Imersão $B^{\alpha,p}_p(R^n) \hookrightarrow C^\alpha_p(R^n)$
5.1.2 A Otimalidade da Imersão $C^\alpha_p \hookrightarrow B^{\alpha,\infty}_p$

Capítulo 6 **A Imersão $C^\alpha_p(R^n) \hookrightarrow C^\beta_q(R^n)$** 98

6.1 Uma Imersão no Espaço de Funções Contínuas
6.2 Um Resultado de Elias M. Stein
6.3 A Imersão $C^\alpha_p(R^n) \hookrightarrow C^\beta_q(R^n)$
6.3.1 O Operador Potencial de Riesz
6.3.2 Dois Resultados em $L^1(R^n) + L^\infty(R^n)$
6.3.3 A Imersão $C^\alpha_p(R^n) \hookrightarrow C^0_q(R^n)$

Referências 110

Apresentação

Em 1984, Ronald A. DeVore e Robert C. Sharpley [1] apresentaram as funções maximais $f_\alpha^\sharp$ e $f_\alpha^\flat$ para $\alpha \geq 0$, $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ e Ω é todo o R^n ou um cubo de R^n; estas funções maximais medem regularidade local de f e definem, respectivamente, os espaços (de Banach) de funções $C_p^\alpha(\Omega)$ e $\mathcal{C}_p^\alpha(\Omega)$ para $1 \leq p \leq \infty$. Este é o conteúdo do **Capítulo 2** e é a parte principal desta dissertação.

A dissertação compõe-se de 6 capítulos onde apresentamos o

Teorema de DeVore e Sharpley . *São válidas as seguintes afirmações:*

Parte I: Seja $\Omega = R^n$ ou um cubo de R^n.

i) *se $\alpha \geq 0$, $k \in N$ e $1 \leq p \leq \infty$ então*

- $\mathcal{C}_p^\alpha(\Omega) \hookrightarrow C_p^\alpha(\Omega)$ *e a igualdade* $\mathcal{C}_p^\alpha(\Omega) = C_p^\alpha(\Omega)$ *ocorre quando α não for inteiro.*
- $\mathcal{C}_\infty^\alpha(\Omega) = Lip\ \alpha(\Omega)$, $C_\infty^\alpha(\Omega) = B_\alpha^{\infty,\infty}(\Omega)$, $\mathcal{C}_p^k(\Omega) \subseteq W^{k,p}(\Omega)$, $\mathcal{C}_1^k(\Omega) \subset W^{k,1}(\Omega)$.
- $B_p^{\alpha,p}(\Omega) \hookrightarrow C_p^\alpha(\Omega) \hookrightarrow B_p^{\alpha,\infty}(\Omega)$.

ii) *se $k \in N$ e $1 < p \leq \infty$ então*

- $\mathcal{C}_p^k(\Omega) = W^{k,p}(\Omega)$

Parte II: Seja $\Omega = R^n$.

iii) *se $\alpha = 0$ e $1 \leq p \leq \infty$ então*

- $C_p^0(R^n) = L^p(R^n)$ *e* $C_\infty^0(R^n) = BMO$.

iv) *se $1 \leq p \leq \infty$ e $0 \leq \beta \leq \alpha + n(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})$ então*

- $C_p^\alpha(R^n) \hookrightarrow C_q^\beta(R^n)$.

O teorema acima é a reunião dos principais resultados obtidos em DeVore-Sharpley [1]. Um teorema análogo ao *Teorema de DeVore-Sharpley* foi enunciado explicitamente em 1989 por Hans

Wallin [1]. Neste último artigo: *i*) são dados condições que generalizam o *Teorema de DeVore-Sharpley* e *ii*) os espaços $C_p^\alpha(\Omega)$ e $\mathcal{C}_p^\alpha(\Omega)$ são denominados *Espaços de DeVore-Sharpley.*

DeVore-Sharpley [1] salienta a pouca divulgação de utilizar funções maximais no estudo de regularidade de funções e propriedades de vários operadores em espaços regulares.

Outras funções maximais definindo espaços de funções podem ser vistos em Bojarsky [1] e Strömberg-Torchinsky [1]. Em Strömberg-Torchinsky [1] generalizam-se $f_\alpha^\sharp$ e $f_\alpha^\flat$.

Em 1986, Sharpley-Shim [1] estudam integrais singulares em $C_p^\alpha(\Omega)$.

Interpolação em $C_p^\alpha(\Omega)$ e $\mathcal{C}_p^\alpha(\Omega)$ é relatado em DeVore-Sharpley [1].

Não apresentaremos resultados para outras regiões Ω (distintos de R^n e cubos de R^n) e $0 < p < 1$. Estes casos são estudados separadamente em DeVore-Sharpley [1].

Esperamos que esta dissertação desperte o interesse do leitor para os diversos artigos citados nos parágrafos anteriores e os casos aqui não abordados de DeVore-Sharpley [1]. Aliás a repercussão do artigo de DeVore-Sharpley [1] pode ser visto em DeVore [1], Sharpley-Shim [1], Bojarski [1] e Wallin [1].

Sugerimos que o **Capítulo 1** (exceto a **seção 1.1**) seja visto à medida que os resultados nele contidos forem mencionados. As seções são independentes entre si e tratam de diversos assuntos como a *desigualdade tipo Hardy*; *desigualdade clássica de Markov* e *desigualdade de Gagliardo*; e propriedades das *funções distribuição*, *rearranjo não crescente* e *rearranjo maximal.* Esta última função permite definir uma norma para o *espaço de Lorentz.* Estamos também interessados no *espaço de Marcinkiewicz.* (Contido no *espaço de Lorentz.*) Neste capítulo fazemos também uma abordagem histórica de alguns resultados de Análise Harmônica. Apresentamos a relação existente entre diferenciação de integrais e o operador maximal M de Hardy e Littlewood. Funções maximais são utilizados no estudo de diferenciação, integrais singulares e convergência quase sempre; conforme DeVore-Sharpley[1]. Por exemplo, indicamos como segue o *teorema clássico de diferenciação de Lebesgue* utilizando propriedades do operador M. Incluímos, como aplicação, uma caracterização (devido a Guzmán e Welland em 1971) do espaço de Zygmund via operador M. O resultado principal é a propriedade do operador M ser *tipo (p,p)* para $1 < p \leq \infty$ e *tipo fraco (1,1)*. Para essa finalidade, sugerimos ao leitor uma olhada nos comentários e resultados. (As demonstrações deste capítulo poderão ser deixadas para uma segunda oportunidade.) A leitura completa do **Capítulo 1** poderá ser feita após a leitura dos demais capítulos.

O **Capítulo 2** é a parte principal desta dissertação. Seja Q um cubo de R^n e $k \in N$. Iniciamos apresentando um estudo detalhado das projeções do espaço $L^1(Q)$ no espaço de polinômios de grau $\leq k$. Isto motiva a definição das funções maximais e os espaços de funções comentados no primeiro parágrafo acima. Como resultados adicionais, incluímos uma generalização das funções maximais $f_\alpha^\sharp$ e $f_\alpha^\flat$ e um teorema tipo diferenciação de Lebesgue quando Ω for um cubo de R^n. Em particular, segundo DeVore-Sharpley [1], a função maximal $f_\alpha^\sharp$ para $0 \leq \alpha < 1$ foi introduzido por A. P. Calderón e R. Scott em 1978. O caso $\alpha = 0$ é importante no estudo do *espaço BMO*. Mais resultados do caso $\alpha = 0$ será visto no **Capítulo 4**.

O **Capítulo 3** inicia com algumas propriedades dos aproximantes em espaços normados e espaços métricos; e contém resultados a serem utilizados exclusivamente na **seção 4.4** do próximo capítulo. Este capítulo possui dois propósitos. O primeiro deles é suprir um caso do **Teorema 4.8** válido para $1 \leq p \leq \infty$. O caso $1 < p \leq \infty$ é coberto pela propriedade do operador M ser limitado em $L^p(Q)$ para $1 < p \leq \infty$ (este fato é visto no primeiro capítulo). No caso $p = 1$, o truque será definir um operador M_σ (dependendo de M e $\sigma := (1 + \frac{\beta}{\alpha})^{-1}$ com $0 < \beta \leq \alpha$) limitado em $L^1(Q)$. O operador M_σ é apresentado neste capítulo juntamente com outras cinco funções maximais biparamétricas $f_{\alpha,q_0}^\sharp$, $f_{\alpha,q_0}^\flat$, $F_{\alpha,q}^\sharp$, $F_{\alpha,q}^\flat$, $F_{j,q}$, o operador maximal de Calderón N_q^α e as derivadas de Peano $D_\nu f$; onde $f \in L_{loc}^{q_0}(\Omega)$ ou $L_{loc}^q(\Omega)$ conforme o caso, $j \in N$, $\alpha > 0$ (ao contrário dos demais capítulos onde α pode ser considerada ≥ 0, a condição de α ser estritamente positivo implicará na convergência de uma série geométrica), $1 \leq q_0 < \infty$, $0 < q < \infty$ e ν é um multi-índice. No caso $q_0 = 1$, as funções $f^{\sharp}_{\alpha,1}$ e $f^{\flat}_{\alpha,1}$ são iguais a $f^{\sharp}_{\alpha}$ e $f^{\flat}_{\alpha}$, respectivamente; portanto, $f^{\sharp}_{\alpha,q_0}$ e $f^{\flat}_{\alpha,q_0}$ são as generalizações naturais de $f^{\sharp}_{\alpha}$ e $f^{\flat}_{\alpha}$, respectivamente. Além disso, as funções $F^{\sharp}_{\alpha,q}$ e $F^{\flat}_{\alpha,q}$ são equivalentes (mas não são iguais) a $f^{\sharp}_{\alpha,q_0}$ e $f^{\flat}_{\alpha,q_0}$, respectivamente, quando $1 \leq q_0 = q < \infty$; portanto, aquelas funções são as generalizações destas funções. Qual a vantagem de definir $F^{\sharp}_{\alpha,q}$ e $F^{\flat}_{\alpha,q}$? (estas funções são casos particulares de $F_{j,q}$ onde $j \in N$ e $0 < q < \infty$ e são apresentados no segundo capítulo.) O fato supreendente é a possibilidade de substituir $f^{\sharp}_{\alpha}$ e $f^{\flat}_{\alpha}$ por $F^{\sharp}_{\alpha,q}$ e $F^{\flat}_{\alpha,q}$, respectivamente, nas definições de C^{α}_{p} e C^{α}_{p} quando $q \leq p$ e $1 \leq p \leq \infty$. A outra finalidade é mostrar a equivalência entre $F^{\flat}_{\alpha,q}$ e N^{α}_{q} via derivadas de Peano. Como resultado complementar, apresentamos um teorema tipo diferenciação de Lebesgue quando Ω é um cubo e $q < 1$.

No **Capítulo 4** relacionamos $C^{\alpha}_{p}(\Omega)$ e $C^{\alpha}_{p}(\Omega)$ com os espaços de Sobolev, Besov e Lipschitz; onde $\alpha > 0$, $1 \leq p \leq \infty$ e $\Omega = R^n$ ou um cubo de R^n. Se $k \in N$ e $1 < p \leq \infty$ então vale a igualdade $C^{k}_{p}(\Omega) = W^{k,p}(\Omega)$, com normas equivalentes, devido a Calderón [3] em 1972. Se $p = 1$ então $C^{k}_{1}(\Omega) \subset W^{k,1}(\Omega)$. Para $\alpha > 0$ fixo valem as igualdades $C^{\alpha}_{\infty}(\Omega) = B^{\alpha,\infty}_{\infty}(\Omega)$ e $C^{\alpha}_{\infty}(\Omega) = Lip\,\alpha(\Omega)$ com normas equivalentes. (No próximo capítulo concluiremos que $C^{\alpha}_{p}(\Omega)$ é espaço de Besov $B^{\alpha,p}_{p}(\Omega)$ se e somente se $p = \infty$.) Apresentamos a imersão $C^{\alpha}_{p}(R^n) \hookrightarrow C^{\beta}_{p}(R^n)$ para $0 < \beta \leq \alpha$ e $1 \leq p \leq \infty$. (A demonstração deste fato não vale para $\Omega =$ cubo de R^n nem serve para provar a imersão $C^{\alpha}_{p}(\Omega) \hookrightarrow C^{\beta}_{p}(\Omega)$; o porquê desta deficiência será devidamente esclarecido.) Este resultado será generalizado na último capítulo. Finalmente definimos o espaço $C^{0}_{p}(\Omega)$. Para isso apresentamos um resultado para motivar as seguintes definições: $C^{0}_{p}(\Omega) := L^p(\Omega)$ quando $1 \leq p < \infty$ e $C^{0}_{\infty}(\Omega) := BMO$.

Neste **Capítulo 5** prosseguimos comparando os *espaços de DeVore-Sharpley* com os *espaços de Besov* $B^{\alpha,q}_{p}(\Omega)$. Apresentamos as imersões $B^{\alpha,p}_{p}(\Omega) \hookrightarrow C^{\alpha}_{p}(\Omega) \hookrightarrow B^{\alpha,\infty}_{p}(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$ e $\alpha > 0$. Verificaremos a otimalidade da imersão $B^{\alpha,p}_{p}(\Omega) \hookrightarrow C^{\alpha}_{p}(\Omega)$, isto é, existe uma função $f \in B^{\alpha,q}_{p}(\Omega)$ para cada $1 \leq p < q \leq \infty$ tal que $f \notin C^{\alpha}_{p}(\Omega)$.

No **Capítulo 6** obteremos a região do plano onde ocorre a imersão $C^{\alpha}_{p}(R^n) \hookrightarrow C^{\beta}_{q}(R^n)$. Para esse objetivo apresentamos: *i*) uma imersão no espaço das funções contínuas, *ii*) um resultado devido a Elias M. Stein de 1981 e *iii*) o *operador potencial de Riesz*, juntamente com o *Teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev*.

Encerramos esta apresentação falando a respeito das notações e constantes. Basicamente, utilizaremos as notações de DeVore-Sharpley [1] e suas referências. Com a finalidade de reduzir a quantidade de símbolos, algumas notações tem *prazo de validade* no seguinte sentido: essas notações só valem durante uma demonstração específica; freqüentemente estas notações auxiliares utilizados durante uma demonstração podem ser utilizados em outras demonstrações com outro significado; em cada caso, indicamos o significado a que a notação se refere. Esperamos que isto não esforce demasiadamente o leitor.

Geralmente, ao longo de um artigo, as constantes são freqüentemente denotadas pela mesma notação clássica c. Isto se deve ao fato de poupar espaço e tempo de composição e revisão do texto, sem contudo, prejudicar o seu conteúdo. Tendo esta dissertação um caráter expositório, indicamos explicitamente essas constantes quando for acessível; caso contrário, indicamos os parâmetros de que dependem as constantes. Um dos objetivos do **Capítulo 1** e da **seção 2.1** é a obtenção dessas constantes.

Capítulo 1

Resultados Básicos

O objetivo deste capítulo é apresentar desigualdades para funções, especialmente para polinômios, e também resultados que nortearam o surgimento dos conceitos a serem discutidas no próximo capítulo.

A desigualdade tipo Hardy relaciona integral dupla em termos de uma integral simples e será conseqüência imediata de um teorema de Hilbert.

Outra desigualdade é a de Markov, em um intervalo da reta, relacionando o máximo assumido pela derivada de um polinômio com o máximo do mesmo polinômio.

Existe um resultado, devido a Privalov, onde vale uma espécie de desigualdade reversa à de Markov.

Será obtida a versão n-dimensional da desigualdade de Markov .

Mostraremos a desigualdade de Gagliardo e uma estimativa dos coeficientes de um polinômio por uma norma do mesmo polinômio.

A seguir apresentamos três funções: distribuição, rearranjo não crescente e rearranjo maximal; com algumas de suas propriedades. Utilizamos as duas últimas funções para definir uma seminorma e uma norma, respectivamente, no espaço de Lorentz.

Na parte de diferenciação de integrais apresentamos o *teorema clássico de Lebesgue para diferenciação de integrais.* Os problemas de diferenciação de uma função refletem um comportamento local da função. Afinal, a diferenciação está definida em termos de limites.

Por outro lado, os teoremas maximais são definidos em termos de supremos. Assim, os teoremas maximais refletem um comportamento global. Para cada função $f \in L^1_{loc}(R^n)$ definiremos três funções maximais $M_1 f(x)$, $M_2 f(x)$ e $Mf(x)$ e mostraremos a equivalência entre si. Quaisquer uma delas poderá ser denominada função maximal de Hardy-Littlewood. Por exemplo, $Mf(x)$ será a *função maximal de Hardy-Littlewood.* O principal resultado deste capítulo é o *Teorema Maximal de Hardy-Littlewood.* Mf será utilizada para indicar como obter o *Teorema de Diferenciação de Lebesgue.* Outras aplicações de Mf serão mencionadas neste capítulo.

Uma aplicação das funções rearranjo não crescente e rearranjo maximal se dará na equivalência entre $(Mf)^*$ e f^{**} devido a Hardy, Littlewood e Hertz em 1968. Para isso definimos os cubos diádicos e apresentamos uma versão para cubos diádicos do *lema de cobertura tipo Vitali.*

Finalizamos o capítulo com a caracterização, devido a Guzmán e Welland em 1971, do *espaço de Zygmund*, via operador maximal de Hardy-Littlewood.

1.1 Preliminares

Seja $n \in N$. Denotamos o espaço euclideano real de dimensão n por R^n. As n-uplas de números reais $x := (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y := (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ representam elementos de R^n. O produto interno de x e y é o número real $(x, y) := x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$. A norma de x é o número real $\|x\| := \sqrt{(x,x)}$.

Por $dx := dx_1dx_2 \cdots dx_n$ representamos a medida de Lebesgue[1] em R^n. A medida de Lebesgue de um conjunto mensurável $\Omega \subseteq R^n$ é indicada por $|\Omega| := \int_\Omega dx$.

Consideraremos funções (Borel) mensuráveis definidas em Ω com valores reais.

O *supremo essencial* de uma função f sobre Ω é definido como segue: se $|\{x \in \Omega : f(x) > \lambda\}| > 0$ para todo real λ tem-se $ess\ sup_\Omega f := +\infty$; caso contrário, $ess\ sup_\Omega f := \inf\{\lambda : |\{x \in \Omega : f(x) > \lambda\}| = 0\}$.

Para $0 < p \leq \infty$ definimos por $L^p(\Omega, dx)$, ou simplesmente $L^p(\Omega)$ ficando subentendido a medida dx, a classe de todas as funções mensuráveis f definidas em Ω, onde

$$|f|_{L^p(\Omega)} := \int_\Omega |f(x)|dx < \infty \quad \text{se } p \text{ for finito} \quad \text{e} \quad |f|_{L^\infty(\Omega)} := ess\ sup_{x\in\Omega}|f(x)| < \infty.$$

Não faremos distinções entre função e classes de funções módulo igualdade quase sempre, isto é, escrevemos $f \in L^p(\Omega)$ quando $|f|_{L^p(\Omega)}$ for finito e $f \equiv 0$ (função nula) em $L^p(\Omega)$ quando $f(x) = 0$ para quase todo x de Ω.

O fato de $L^p(\Omega)$ ser espaço vetorial é equivalente às afirmações:

i) se $c \in R$ e $f \in L^p(\Omega)$ então $cf \in L^p(\Omega)$ *e* *ii)* se f e $g \in L^p(\Omega)$ então $f + g \in L^p(\Omega)$.

O item *i)* segue da definição de $|.|_{L^p(\Omega)}$; e *ii)* no caso $p = \infty$ segue da desigualdade triangular; e no caso p finito segue da desigualdade $(u+v)^p \leq 2^p(u^p + v^p)$ para todo u e $v \geq 0$. Utilizaremos esta última desigualdade em diversas ocasiões e a sua verificação é simples pois $u \leq v$ ou $v \leq u$ implicam $u + v \leq 2v$ ou $u + v \leq 2u$, portanto, $(u+v)^p \leq 2^pv^p$ ou $(u+v)^p \leq 2^pu^p$, donde segue a desigualdade.

Espaços de Banach são os espaços lineares normados completos.

Dentre os diversos espaços de Banach destacamos o *espaço de Riesz* ou *espaço de Lebesgue* $L^p(\Omega)$ onde $1 \leq p \leq \infty$.[2]

Em geral, conforme DeVore-Sharpley [1], resultados em $L^p(\Omega)$ dependem do comportamento das funções na fronteira de Ω e condições de regularidade da fronteira de Ω. Levando isto em conta, nesta dissertação, consideraremos dois casos:

i) $\Omega = R^n$. Neste caso, conforme Sadosky [1], a medida de Lebesgue dx é caracterizado, a menos de multiplicação por constantes, pela invariância sob translação em R^n, donde segue a igualdade em

$$\int_{R^n} f(x-h)dx = \int_{R^n} f(x)dx \quad \text{para todo } h \in R^n.$$

Por um cubo Q em R^n entendemos um conjunto da forma $Q := \{x \in R^n; a_i \leq x_i \leq a_i + h, i = 1, \cdots, n\}$ onde $a = (a_1, \cdots, a_n)$ é um ponto de R^n e $h \geq 0$. Assim, o cubo Q tem lados paralelos aos eixos coordenados. Será indiferente considerar se a fronteira do cubo pertence ao cubo ou não.

ii) $\Omega = Q$ cubo não degenerado de R^n de lados paralelos aos eixos coordenados. Neste caso, todo subconjunto do cubo possui medida finita e será fácil obter algumas estimativas em termos do comprimento do lado de Q.

[1]Em Ciesielski [1] justifica-se a popularidade da medida de Lebesgue a partir de uma perspectiva histórica. O problema de medir subconjuntos de R^n surgiu no início do século 19 e está relacionado com o surgimento da teoria da integração. A solução apresentada por Lebesgue satisfazia a noção intuitiva de área e volume. Ciesielski [1] também discute um problema solucionado por Ciesielski.

[2]O espaço $L^p(\Omega)$ foi introduzido por Frederic Riesz em 1908; conforme Oklander [1].

1.2 Desigualdades Tipo Hardy

Sob certas condições, integrais iteradas são avaliadas como produto de integrais simples de funções de uma variável.

As desigualdades tipo Hardy fornecem estimativas de integrais duplas através de uma cota superior em termos de uma integral simples de funções de uma variável.

Seja $R^+ = (0, \infty)$ a semireta real. Nesta seção consideramos os números $1 < p < \infty$ e q satisfazendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. As variáveis x e y serão números reais. As funções $f(x)$ e $g(y)$ serão não negativas e pertencem a $L^p(R^+)$ e $L^q(R^+)$, respectivamente.

Esta seção está baseada em Hardy-Littlewood-Pólya [1].

Teorema 1.1 . (Teorema de Hilbert versão para integral) *Seja $K(x,y)$ uma função não negativa, homogênea de grau -1. Definimos a constante c (finita ou não) dada por*

$$c := \int_0^\infty K(x,1)x^{-1/p}dx = \int_0^\infty K(1,y)y^{-1/q}dy\,. \tag{1.1}$$

Então,

$$i) \quad \int_0^\infty \int_0^\infty K(x,y)f(x)g(y)dxdy \le c\Big(\int_0^\infty f(x)^p dx\Big)^{1/p}\Big(\int_0^\infty g(y)^q dy\Big)^{1/p}$$

$$ii) \quad \int_0^\infty \Big(\int_0^\infty K(x,y)f(x)dx\Big)^p dy \le c^p \int_0^\infty f(x)^p dx$$

$$iii) \quad \int_0^\infty \Big(\int_0^\infty K(x,y)g(y)dy\Big)^q dx \le c^q \int_0^\infty g(y)^q dy\,.$$

Quando $K(x,y)$ é positivo e exceto quando $f \equiv 0$ ou $g \equiv 0$ nos itens $i) - ii) - iii)$ teremos $<$ (em vez de $\le$). Ou seja, c é constante ótima.[3]

A segunda igualdade em (**1.1**) segue pela mudança de coordenadas $y := 1/x$ e da homogeneidade de K.[4]

Antes de demonstrar o **Teorema 1.1**, apresentaremos um exemplo da função K, além da função idênticamente nula. Outros exemplos podem ser visto em Hardy-Littlewood-Polya [1].

Sejam $\alpha < 1/q$ e $K_1(x,y) := \frac{y^{\alpha-1}}{x^\alpha}$ se $x \le y$ e 0 se $x > y$. Então $c_1 = \int_0^\infty K_1(1,y)y^{-1/q}dx = \int_0^\infty y^{\alpha-1-\frac{1}{q}}dy = \frac{q}{1-\alpha q}$.

No contexto de simplificar a prova do teorema de Hilbert surgiu o

Teorema 1.2 . (Desigualdade de Hardy versão para integral) *Sejam $0 < p < \infty$ e $F(x) := \frac{1}{x}\int_0^x f(\xi)d\xi$. Então, $\int_0^\infty F(x)^p dx < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty f(\xi)^p d\xi$; exceto para $f \equiv 0$ quando ocorre a igualdade.*[5]

---

[3]Conforme Hardy-Littlewood-Polya [1], a versão análoga para séries do **Teorema 1.1**, com $p = q = 2$, é conhecida como o *teorema de Hilbert para séries duplas* e foi provado por Hilbert, exceto pela constante ótima, em um seminário sobre equações integrais. Weil publicou uma prova em 1908. As generalizações para outros valores de p e q devem-se a G.H.Hardy e M. Riesz. A versão para integral e a determinação da constante ótima (**1.1**) é devido a Schur. A procura de constantes ótimas é motivação para pesquisa; por exemplo em Pichorides [1], Phillips [1] e Bergh-Löfströn [1].

[4]Segundo Katz [1], Leonhard Euler foi o pioneiro em desenvolver a noção de integral dupla em 1769; e a seguir propôs a questão do que aconteceria à integral dupla se mudasse as variáveis. Assim surgiu o *Teorema de Mudança de Variáveis* que requer a diferenciabilidade da transformação de variáveis. Em 1955, T. Radó e P. Reichelderfer deram a versão do *Teorema de Mudança de Variáveis* quando a tranformação é contínua e generalizando o conceito de *Jacobiano*. Guzmán retira essa condição de continuidade apresentando a sua versão do *Teorema de Mudança de Variáveis* em Guzmán [4].

[5]Este teorema foi provado por G. H. Hardy em 1920 e produz a *desigualdade de Minkowsky* pela mudança de

Demonstração . Hardy-Littlewood-Pólya [1]. ■

Na demonstração, a seguir, do **Teorema 1.1** observamos que $(0,\infty)\times(0,\infty)$ pode ser substituído pelo retângulo $[a,b]\times[c,d]$ ou faixas, caso b ou d não sejam finitos.

Demonstração do Teorema 1.1 . Mostraremos i). A relação $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ e a *desigualdade de Hölder* produzem

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\int_0^\infty K(x,y)\ f(x)\ g(y)\ dx\ dy\ = \\ &\int_0^\infty\int_0^\infty f(x)\ K(x,y)^{1/p}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{pq}} g(y)\ K(x,y)^{1/q}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{pq}} dx\ dy\ \le\ A^{1/p}\ .\ B^{1/q}\end{aligned} \tag{1.2}$$

onde

$$A:=\int_0^\infty\int_0^\infty f(x)^pK(x,y)\left(\frac{x}{y}\right)^{1/q}dxdy\ \text{ e }\ B:=\int_0^\infty\int_0^\infty g(x)^qK(x,y)\left(\frac{y}{x}\right)^{1/p}dxdy\,.$$

Desenvolveremos A. Fazendo $\xi:=y/x$ na definição acima e utilizando (**1.1**) seguem

$$\begin{aligned}A\ &=\ \int_0^\infty f(x)^p\left(\int_0^\infty K(x,y)\left(\frac{y}{x}\right)^{1/q}dy\right)dx=\int_0^\infty f(x)^p\left(\int_0^\infty K(x,x\xi)\xi^{-1/q}xd\xi\right)dx\\ &=\ \int_0^\infty f(x)^p\left(\int_0^\infty K(1,\xi)\xi^{-1/q}d\xi\right)dx=c\int_0^\infty f(x)^pdx.\end{aligned}$$

Analogamente,

$$B=c\int_0^\infty g(y)^qdy\,.$$

A substituição dos resultados para A e B acima em (**1.2**) resulta em i). A constante c é dada por (**1.1**).

O item ii) decorre de procedimento análogo empregado para obter i).

De fato, pela relação $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ e a *desigualdade de Hölder* produzem

$$\begin{aligned}\int_0^\infty K(x,y)f(x)dx\ &=\ \int_0^\infty K(x,y)^{1/q}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{pq}}K(x,y)^{1/p}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{pq}}f(x)dx\\ &\le\ c^{1/q}\left(\int_0^\infty K(x,y)\left(\frac{x}{y}\right)^{1/q}f(x)^pdx\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

Elevando esta desigualdade à potência p e integrando em $(0,\infty)$ tem-se

$$\int_0^\infty\left(\int_0^\infty K(x,y)f(x)dx\right)^pdy\le c^{p/q}A\,.$$

Basta substituir, na desigualdade acima, A obtida no item i). Disto resulta ii); o item iii) segue de modo análogo. ■

---

variáveis $x=s\xi$, conforme Bergh-Löfströn [1]. A constante $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ é a melhor possível e foi determinada por Landau em 1926 segundo Hardy-Littlewood-Polya [1]. Sugerimos Pachpatte [1] e Bergh [1].

A função K_1, definida na página 6, nem sempre é positiva. Assim, só podemos concluir o **Teorema 1.1** com $\leq$; neste caso, para K_1 o item $ii)$ da **Proposição 1.1** fica

$$\int_0^\infty y^{p\alpha}\left(\frac{1}{y}\int_0^y x^{-\alpha}f(x)dx\right)^p dy \leq \left(\frac{p}{p-\alpha p-1}\right)^p \int_0^\infty f(x)^p dx\,. \tag{1.3}$$

Se $\alpha = 0$ em (**1.3**) então "quase" vale o **Teorema 1.1**. Relações tipo (**1.3**) dão origem a desigualdades onde não é importante saber se a constante é ótima. Um exemplo deste fato é o seguinte

Teorema 1.3 . (Desigualdades Tipo Hardy)[6] *Considere as funções dadas por*

$$F(x) := \frac{1}{x}\int_0^x f(\xi)d\xi \qquad F_1(x) := \int_0^x f(\xi)\xi^{u-1}d\xi \qquad F_2(x) := \int_x^\infty f(\xi)\xi^{u-1}d\xi\,.$$

Então,

$$i)\quad \int_0^\infty F(x)^p x^r dx \leq \left(\frac{p}{p-r-1}\right)^p \int_0^\infty f(x)^p x^r dx \qquad se\ p > r+1$$

$$ii)\quad \int_0^\infty F_1(x)^p x^r dx \leq \left(\frac{-p}{r+1}\right)^p \int_0^\infty f(x)^p x^{up+r} dx \qquad se\ r < -1$$

$$iii)\quad \int_0^\infty F_2(x)^p x^r dx \leq \left(\frac{p}{r+1}\right)^p \int_0^\infty f(x)^p x^{up+r} dx \qquad se\ r > -1\,.$$

Demonstração . Consideremos a desigualdade (**1.3**).

Para obter $i)$ substituímos $f(x)$ por $f(x)x^\alpha$ em (**1.3**) e a seguir fazemos $\alpha p = r$.

$ii)$ segue se substituirmos $f(x)$ por $f(x)x^{u+\alpha-1}$ em (**1.3**) e a seguir fazemos $p(\alpha-1) = r$.

Considerando $K_2(x,y) := y^{\beta-1}/x^\beta$ se $x \geq y$ e zero se $x < y$, onde $\beta < 1/p$. (K_2 é análoga a K_1.) Verificamos $c_2 = p/(1-\beta p)$. A seguir substituímos $f(x)$ por $f(x)x^{u-\beta}$ em (**1.3**) e fazemos $-\beta p = r$ para obter $iii)$. ∎

Os resultados desta seção podem ser reformulados em termos de $0 < p < 1$; para isso sugerimos Bergh-Löfströn [1] e Hardy-Littlewood-Pólya [1] onde, nesta última referência, também poderá ser encontrada a versão do **Teorema 1.1** para integrais múltiplas.

1.3 Desigualdade de Markov Clássica[7]

Nesta seção comparamos polinômios e suas derivadas na norma $L^p(R^n)$ onde $1 \leq p \leq \infty$. Também apresentamos a desigualdade de Markov para várias variáveis.

Teorema 1.4 . (Desigualdade de Markov para uma variável real)[8] *Seja $\pi(x)$ um polinômio*

[6] A generalização do **Teorema 1.3** pode ser encontrada sob diversas formas em Imoru [1], Maz'ja [1], Lizorkin [1] e Bennett [1]. Lizorkin cita essa generalização com o nome de *Desigualdade de Sysoeva-Talenti* de 1967.

[7] Boas [1] relata a observação do químico Mendeleev sobre essa desigualdade para polinômios quadráticos. Mendeleev comunicou o resultado para A. A. Markov que generalizou para polinômios de grau k, onde $k \in N$.

[8] Uma espécie de desigualdade reversa do **Teorema 1.4** é válida para um subconjunto fechado $F \subset [0,1]$ satisfazendo determinadas condições, isto é, existe uma constante $c > 1$ e uma seqüência de polinômios $\{\pi_m : m \in N\} \subset$ { espaço dos polinômios de grau k} tal que $\max_{x\in F}|\frac{d\pi_m}{dx}(x)| > c^m \max_{x\in F}|\pi_m(x)|$ para todo $n \geq n_0$. Este resultado e as condições exatas para F é devido a A. A. Privalov, originalmente publicado em 1983; uma tradução é encontrada em Privalov [1].

real, definido no intervalo da reta $[-1,1]$, de grau k. Então

$$\max_{|x|\leq 1}\left|\frac{d\pi}{dx}(x)\right| \leq k^2 \max_{|x|\leq 1}|\pi(x)|. \tag{1.4}$$

Demonstração . Lorentz [1]. ■

Os máximos em (**1.4**) são efetivamente atingidos.

Os polinômios $\pi(x)$ e $\frac{d\pi}{dx}(x)$ não precisam assumir o máximo no mesmo ponto. Por exemplo, basta considerar $\pi(x) := \frac{x^2}{2} - x$ no intervalo $[-1,1]$.

Em um intervalo qualquer de comprimento finito [a,b] empregamos a mudança de variável $y := \frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}$ para obter a seguinte versão de (**1.4**),

$$\max_{a\leq y\leq b}\left|\frac{d\pi}{dy}(y)\right| \leq k^2\frac{2}{b-a}\max_{a\leq y\leq b}|\pi(y)|. \tag{1.5}$$

Consideremos o polinômio de duas variáveis $\pi(x_1,x_2) := \sum_{\substack{0\leq i\leq k_1\\ 0\leq j\leq k_2}} c_{ij}x_1^i x_2^j$ com $c_{k_1k_2} \neq 0$ de *grau* $k := k_1+k_2$ definido no cubo $Q := [a_1, a_1+l]\times[a_2,a_2+l]$ de lado $l := |Q|^{1/2}$ e vértice (a_1,a_2). Seja (x_1,x_2) um ponto genérico de Q. Fixemos a componente x_2. Por (**1.5**), na direção $e_1 = (1,0)$ vale

$$\max_{a_1\leq x_1\leq a_1+l}\left|\frac{\partial\pi}{\partial e_1}(x_1,x_2)\right| \leq k_1^2\frac{2}{l}\max_{a_1\leq x_1\leq a_1+l}|\pi(x_1,x_2)|. \tag{1.6}$$

Variando x_2 em (**1.6**) temos

$$\begin{aligned}\max_{a_2\leq x_2\leq a_2+l}\max_{a_1\leq x_1\leq a_1+l}\left|\frac{\partial\pi}{\partial e_1}(x_1,x_2)\right| &\leq k_1^2\frac{2}{l}\max_{a_2\leq x_2\leq a_2+l}\max_{a_1\leq x_1\leq a_1+l}|\pi(x_1,x_2)|\\ &\leq k^2\frac{2}{l}\max_{a_2\leq x_2\leq a_2+l}\max_{a_1\leq x_1\leq a_1+l}|\pi(x_1,x_2)|.\end{aligned} \tag{1.7}$$

Vale o análogo a (**1.7**) para a derivada parcial de π na direção $e_2 = (0,1)$.

Assim, para polinômios de n variáveis, de grau k, definidas em um cubo Q de R^n de lados $[a_i, a_i+l]$, $1\leq i\leq n$, onde $l := |Q|^{1/n}$ e vértice $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, tem-se

$$\max_{x\in Q}\left|\frac{\partial\pi}{\partial x_i}(x)\right| \leq k^2\frac{2}{l}\max_{x\in Q}|\pi(x)| \quad \text{para todo } i=1,2,\ldots,n. \tag{1.8}$$

A seguir apresentamos duas variantes da desigualdade de Markov; conforme sugeridas em Bojarski [2].

Proposição 1.5 . (Desigualdade de Markov para gradiente) *Seja Q um cubo em R^n de lado $l := |Q|^{1/n}$. Todo polinômio π de grau k definido em Q satisfaz*

$$\|\nabla\pi\|_{L^\infty(Q)} \leq \frac{k^2\sqrt{2n(n+1)}}{|Q|^{1/n}}\|\pi\|_{L^\infty(Q)}$$

onde $\nabla\pi$ denota o gradiente de π.

Demonstração. O gradiente do polinômio $\pi(x)$ e a norma euclideana desse gradiente são dados, respectivamente, por

$$\nabla\pi(x) := \left(\frac{\partial\pi}{\partial x_1}(x), \frac{\partial\pi}{\partial x_2}(x), \cdots, \frac{\partial\pi}{\partial x_n}(x)\right) \quad \text{e} \quad |\nabla\pi(x)| := \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\pi}{\partial x_i}(x)\right)^2\right]^{1/2}.$$

Assim, de (**1.8**) e $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, seguem

$$\max_{x\in Q}|\nabla\pi(x)| \le \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\max_{x\in Q}\left|\frac{\partial\pi}{\partial x_i}(x)\right|\right)^2\right]^{1/2} \le \left[\sum_{i=1}^{n}\left(k^2\frac{2}{l}\max_{x\in Q}|\pi(x)|\right)^2\right]^{1/2}$$

$$= \frac{2k^2\sqrt{n(n+1)/2}}{l}\max_{x\in Q}|\pi(x)| = \frac{k^2\sqrt{2n(n+1)}}{|Q|^{1/n}}\max_{x\in Q}|\pi(x)|. \quad \blacksquare$$

Um *multi-índice* é uma n-upla $\nu := (\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n)$ de inteiros não negativos; o *comprimento* de ν é $|\nu| := \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_n$. O *operador diferencial* D^ν de ordem $|\nu|$ é dado por $D^\nu := D_1^{\nu_1} D_2^{\nu_2} \cdots D_n^{\nu_n}$ onde $D_j := \frac{\partial}{\partial x_j}$.

Proposição 1.6 . (Desigualdade de Markov para derivadas) *Seja Q um cubo de R^n de lado $l := |Q|^{1/n}$. Todo polinômio π de grau k definido em Q satisfaz*

$$\|D^\nu\pi\|_{L^\infty(Q)} \le \frac{\left(k^2\sqrt{2n(n+1)}\right)^{|\nu|}}{|Q|^{|\nu|/n}}\|\pi\|_{L^\infty(Q)}$$

onde $D^\nu\pi$ denota a derivada de ordem $|\nu|$ de π.

Demonstração. Faremos indução sobre a ordem $|\nu|$ da derivada.

Se $|\nu| = 1$ temos $D^{|\nu|}\pi(x) \in \left\{\frac{\partial\pi}{\partial x_1}(x), \frac{\partial\pi}{\partial x_2}(x), \cdots, \frac{\partial\pi}{\partial x_n}(x)\right\}$.

Utilizando a **Proposição 1.5** segue, para cada $i = 1, 2, \cdots, n$,

$$\max_{x\in Q}\left|\frac{\partial\pi}{\partial x_i}(x)\right| \le \frac{k^2\sqrt{2n(n+1)}}{l}\max_{x\in Q}|\pi(x)|.$$

Dado um multi-índice $\nu = (\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n)$ de comprimento $|\nu| = m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ suponhamos a proposição válida para todos os multi-índices de comprimento $\le m$.

Portanto, se $|\nu| = m+1$ então $D^\nu\pi(x)$ é um elemento de

$$\left\{\frac{\partial^{|\nu|}\pi}{\partial x_1^{m_1+1}.\partial x_2^{m_2}.\cdots.\partial x_n^{m_n}}(x), \frac{\partial^{|\nu|}\pi}{\partial x_1^{m_1}\partial x_2^{m_2+1}.\cdots.\partial x_n^{m_n}}(x), \cdots, \frac{\partial^{|\nu|}\pi}{\partial x_1^{m_1}\partial x_2^{m_2}.\cdots.\partial x_n^{m_n+1}}(x)\right\}.$$

Utilizando a **Proposição 1.5** juntamente com a hipótese de indução, seguem

$$\max_{x\in Q}\left|\frac{\partial^{|\nu|}\pi}{\partial x_1^{m_1}.\partial x_2^{m_2}.\cdots.\partial x_i^{m_i+1}.\cdots.\partial x_n^{m_n}}(x)\right| = \max_{x\in Q}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^{|\nu|-1}\pi}{\partial x_1^{m_1}.\partial x_2^{m_2}.\cdots.\partial x_n^{m_n}}(x)\right)\right|$$

$$\le \frac{k^2\sqrt{2n(n+1)}}{l}\max_{x\in Q}\left|\frac{\partial^{|\nu|-1}\pi}{\partial x_1^{m_1}.\partial x_2^{m_2}.\cdots.\partial x_n^{m_n}}(x)\right| \le \left(\frac{k^2\sqrt{2n(n+1)}}{l}\right)^{|\nu|}\max_{x\in Q}|\pi(x)|. \quad \blacksquare$$

Conforme Bojarski [2], uma das generalizacões da **Proposição 1.6** é a desigualdade $\|D^\nu \pi\|_{L^p(Q)} \leq c\|\pi\|_{L^q(\mathcal{O})}$, onde p e q são números reais não negativos, $\mathcal{O}$ é um subconjunto aberto de Q e a constante c depende de n, k, p, q e ν. Em particular, se $\mathcal{O} = Q$ e $|\nu| = 1$ então vale a seguinte *desigualdade média de Markov*:

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\nabla\pi|^p\right)^{1/p} \leq \frac{c}{|Q|^{1/n}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\pi|^q\right)^{1/q}$$

onde a constante c depende de n, k, p e q; Bojarski [2].

O caso $p = q = 1$ na desigualdade acima implica na **Proposição 1.5** onde a constante c não precisa ser, necessariamente, igual a $k^2\sqrt{2n(n+1)}$.

O espaço de funções $L^1_{loc}(\Omega)$ é constituído pelas funções $f \in L^1(\Omega)$ tal que $|f|$ é integrável sobre qualquer subconjunto compacto de Ω.

Dada uma função f em $L^1_{loc}(R^n)$, a *média de f sobre o cubo Q* será denotada por

$$f_Q := \frac{1}{|Q|}\int_Q f. \tag{1.9}$$

Entende-se por *diâmetro* do cubo Q o segmento de reta contido no cubo passando pelo centro e cujos extremos são vértices de Q. A medida do comprimento do diâmetro de um cubo Q será denotada por *diam* Q.

Em Torchinsky [1] e Maz'ja [1] encontra-se a prova da seguinte *desigualdade local de Poincaré*:

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f - f_Q|^p\right)^{1/p} \leq 2^{n/p}.diam\ Q.\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\nabla\pi|^p\right)^{1/p}.$$

Para toda constante $a \in R^n$ e cubo Q com $diam\ Q = \sqrt{n}|Q|^{1/n}$, segue da *desigualdade média de Markov* com constante c_0 e da *desigualdade local de Poincaré* com $f := \pi - a$:

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\pi - \pi_Q|^p\right)^{1/p} \leq c_0 2^{n/p}\sqrt{n}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\pi - a|^q\right)^{1/q}. \tag{1.10}$$

Seja $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. De (**1.9**) e da *desigualdade de Hölder*, temos

$$|\pi_Q| \leq \frac{1}{|Q|}\int_Q |\pi| \leq \frac{1}{|Q|}\left(\int_Q |\pi|^q\right)^{1/q}|Q|^{1-\frac{1}{q}} = \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\pi|^q\right)^{1/q}.$$

Em (**1.10**) fazemos $a = 0$. Deste resultado e da relação acima resulta na seguinte desigualdade para polinômios, com expoentes conjugados:

$$\left[\frac{1}{|Q|}\int_Q |\pi|^p\right]^{1/p} \leq \left[\frac{1}{|Q|}\int_Q |\pi - \pi_Q|^p\right]^{1/p} + \left[\frac{1}{|Q|}\int_Q |\pi_Q|^p\right]^{1/p} \leq \max\{c_0 2^{n/p}\sqrt{n}, 1\}\left[\frac{1}{|Q|}\int_Q |\pi|^q\right]^{1/q}.$$

Na próxima seção retiraremos a condição $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ para a relação acima.

1.4 Desigualdades para Polinômios

Mostraremos o comportamento de um polinômio em $L^q(Q)$ para $0 < q \leq \infty$. Primeiramente variamos q e depois Q. A seguir apresentaremos a *Desigualdade de Gagliardo*. Finalmente estimaremos os coeficientes de polinômios.

Esta seção contém resultados relativos à seção 3 de DeVore-Sharpley [1].

A finitude do volume do cubo Q desempenhará um papel importante nesta dissertação. Por exemplo, as funções f em $L^p(Q)$ são também elementos de $L^q(Q)$ para $0 < q \leq p < \infty$ e[9]

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f|^q\right)^{1/q} \leq \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f|^p\right)^{1/p}. \tag{1.11}$$

De fato, se $p = q$ nada temos a provar; caso contrário, se $q < p$ aplicamos a *desigualdade de Hölder* com expoentes conjugados $\frac{p}{q} > 1$ e β onde $\frac{1}{\beta} := 1 - \frac{q}{p} > 0$, às funções $|f|^q$ e 1 resultando em

$$\int_Q |f|^q.1 \leq \left(\int_Q |f|^p\right)^{q/p} |Q|^{1-\frac{q}{p}}.$$

Dividindo esta desigualdade por $|Q|$ e extraíndo a q-ésima raiz obtemos (**1.11**).

A prova da versão de (**1.11**) no caso $p = \infty$ é imediata. Enunciá-la-emos a seguir para futuras referências. Seja $f \in L^\infty(Q)$. Então $f \in L^q(Q)$ para $0 < q < \infty$ e

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f|^q\right)^{1/q} \leq \|f\|_{L^\infty(Q)}. \tag{1.12}$$

Para polinômios existem as desigualdades reversas de (**1.11**) e (**1.12**). Este é o objetivo da próxima subseção.

1.4.1 Desigualdade de Gagliardo

A segunda desigualdade do item *ii*) do teorema a seguir é a *desigualdade de Gagliardo*; conforme Wallin [1].

Proposição 1.7 . *Sejam $k \geq 0$ e $q > 0$. Para todo polinômio π de grau k e cubo $Q \subset R^n$ existe uma constante $c \geq 1$ dependendo de q, k e n tal que*

$$i)\quad \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\pi|^q\right)^{1/q} \leq \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\pi|^p\right)^{1/p} \leq c\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\pi|^q\right)^{1/q} \qquad se\ q \leq p < \infty;$$

$$ii)\quad \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\pi|^q\right)^{1/q} \leq \|\pi\|_{L^\infty(Q)} \leq c\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\pi|^q\right)^{1/q} \qquad se\ q < p = \infty.$$

Demonstração . Se $k = 0$, o polinômio π é constante. Logo valem as igualdades em *i*) e *ii*). Portanto, basta escolher $c \geq 1$; digamos $c = 1$.

Vejamos o caso $k > 0$. As primeiras desigualdades em *i*) e *ii*) são (**1.11**) e (**1.12**), respectivamente, para polinômios.

Afirmamos que a segunda desigualdade em *ii*) implica na segunda desigualdade em *i*).

De fato, sejam p e q números positivos quaisquer (não necessariamente $q < p$).

Por (**1.12**) e a hipótese de que vale a segunda desigualdade em *ii*), seguem

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\pi|^p\right)^{1/p} \leq \|\pi\|_{L^\infty(Q)} \leq c\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\pi|^q\right)^{1/q}.$$

[9]B.Subramanian caracterizou, em 1978, todas as medidas positivas μ tal que $L^p(\mu) \subseteq L^q(\mu)$ onde $0 < p \leq q \leq \infty$. Mais tarde, J.I.Romero caracterizou, em 1983, todas as medidas positivas μ tal que $L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu)$ onde $0 < p \leq q \leq \infty$. Utilizando o *Teorema do Gráfico Fechado*, Villani [1] simplificou as condições e provas de Subramanian e Romero. Independentemente, Miamee [1], utilizando também o *Teorema do Gráfico Fechado*, generaliza os resultados de Subramanian e Romero. Sugerimos também Villani [2].

Isto prova a segunda desigualdade em $i)$. Vejamos a segunda desigualdade em $ii)$.
O polinômio π é uma função contínua no cubo compacto Q; logo, existe um ponto $x_0 \in Q$ onde

$$|\pi(x_0)| = \|\pi\|_{L^\infty(Q)}. \tag{1.13}$$

Pela *Desigualdade do Valor Médio* e **Proposição 1.5**, obtemos

$$|\pi(x) - \pi(x_0)| \leq \| \, |\nabla\pi| \, \|_{L^\infty(Q)}|x - x_0| \leq c_0\|\pi\|_{L^\infty(Q)} \frac{|x - x_0|}{|Q|^{1/n}}. \tag{1.14}$$

onde $c_0 := k^2\sqrt{2n(n+1)} \geq 1$ pois $k > 1$ e $n \geq 1$.

Definimos o conjunto $S := \left\{x \in Q : |x - x_0| \leq \frac{|Q|^{1/n}}{2c_0}\right\}$ contido na esfera em R^n de centro x_0 e raio $r := \frac{|Q|^{1/n}}{2c_0}$. Assim, $S \subset Q$. Afirmamos que existe uma constante c_1 depdendendo de c_0 e de n tal que $|S| \geq c_1|Q|$. De fato, seja $\tilde{Q}$ o cubo, centrado em x_0 com diâmetro de comprimento $2r$, inscrito em S. Assim, $2r = diam\ \tilde{Q} = \sqrt{n}\ lado\ de\ \tilde{Q}$.

Portanto,

$$|S| \geq \frac{1}{2^n}\left(lado\ de\ \tilde{Q}\right)^n = \frac{1}{2^n}\left(\frac{2r}{\sqrt{n}}\right)^n = \frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{c_0\sqrt{n}}\right)^n |Q|. \tag{1.15}$$

Isto mostra a afirmação.

Lembramos que $x_0 \in S$. Restringindo $x \in S$ segue de (**1.14**) e da definição do conjunto S:

$$|\pi(x) - \pi(x_0)| \leq c_0\|\pi\|_{L^\infty(Q)} \frac{1}{|Q|^{1/n}} \frac{|Q|^{1/n}}{2c_0} = \frac{1}{2}\|\pi\|_{L^\infty(Q)}.$$

Se $x \in S$ então a desigualdade acima e (**1.13**) produzem

$$|\pi(x)| \geq |\pi(x_0)| - |\pi(x) - \pi(x_0)| \geq |\pi(x_0)| - \frac{1}{2}\|\pi\|_{L^\infty(Q)} = \frac{1}{2}\|\pi\|_{L^\infty(Q)}.$$

Elevando esta última desigualdade à q-ésima potência, integrando sobre S e por (**1.15**), seguem

$$\|\pi\|^q_{L^\infty(Q)} \leq \frac{2^q}{|S|}\int_S |\pi|^q \leq \frac{2^q}{|S|}\int_Q |\pi|^q \leq 2^q\frac{(2c_0\sqrt{n})^n}{|Q|}\int_Q |\pi|^q.$$

Basta extrair a q-ésima raiz da desigualdade acima para obter a segunda desigualdade em $ii)$ onde a constante c vale $2\left(2nk^2\sqrt{n+1}\right)^{n/q}$. ■

Encerraremos esta seção apresentando duas proposições utilizando o fato de que em espaços de dimensão finita duas normas quaisquer são equivalentes.

Usando argumento combinatório, Stein-Weiss [1] obtém a dimensão do espaço dos polinômios de grau exatamente igual a k_0 dado por $\frac{(n+k_0-1)!}{(n-1)!k_0!}$.

Assim, a dimensão do espaço P_k dos polinômios de grau $\leq k$ é finita e vale

$$\sum_{j=0}^{k} \frac{(n+j-1)!}{(n-1)!j!}. \tag{1.16}$$

Sejam um número real $\lambda > 0$ e um cubo Q de lado $l := |Q|^{1/n}$. Denotamos por λQ o cubo com o mesmo centro de Q e lado de comprimento λl.

Proposição 1.8 . *Sejam $k \geq 0$, $q > 0$ e $\lambda > 0$. Para todo polinômio $\pi \in P_k$ e cubo $Q \subset R^n$,* *existem uma constante c_1 dependendo exclusivamente de k, n, q e λ e outra constante c_2 dependendo exclusivamente de k, n e λ tais que*

$$i) \quad \left(\frac{1}{|\lambda Q|}\int_{\lambda Q}|\pi|^q\right)^{1/q} \le c_1\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q|\pi|^q\right)^{1/q} \quad \textit{quando } q \textit{ é finito}$$

$$ii) \quad \|\pi\|_{L^\infty(\lambda Q)} \le c_2\|\pi\|_{L^\infty(Q)} \qquad \textit{quando } q = \infty\,.$$

Demonstração. Mostraremos o item i). Seja q finito. Pela equivalência das normas $\|.\|_{L^q(\lambda Q)}$ e $\|.\|_{L^q(Q)}$ estrita ao espaço P_k de dimensão finita (dada por (**1.16**)), existe uma constante c_0 dependendo somente das dimensões de P_k (isto é, c_0 dependendo somente de k e n devido a (**1.16**)), satisfazendo

$$\|\pi\|_{L^q(\lambda Q)} \le c_0\|\pi\|_{L^q(Q)} \quad \text{para todo } \pi \in P_k\,.$$

Como $|\lambda Q| = \lambda^n|Q|$, segue a relação

$$\frac{1}{|\lambda Q|}\int_{\lambda Q}|\pi|^q \le \frac{c_0}{\lambda^n}\frac{1}{|Q|}\int_Q|\pi|^q\,.$$

Extraindo a q-ésima raiz desta desigualdade segue i) onde $c_1 := \left(\frac{c_0}{\lambda^n}\right)^{1/q}$ que depende de k, n, q e λ.

Mostraremos o item ii). Afirmamos que ii) segue de i).

De fato, quando $q = \infty$ podemos escolher um parâmetro auxiliar finito $q_0 > 0$. Pela *desigualdade de Gagliardo* dada pelo item ii) da **Proposição 1.7** com constante $\tilde{c}$ e pelo item i) provado acima, segue

$$\|\pi\|_{L^\infty(\lambda Q)} \le \tilde{c}\left(\frac{1}{|\lambda Q|}\int_{\lambda Q}|\pi|^{q_0}\right)^{1/q_0} \le \tilde{c}c_1\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q|\pi|^{q_0}\right)^{1/q_0} \le c_2\|\pi\|_{L^\infty(Q)}$$

onde $c_2 := \tilde{c}c_1$ dependendo de k, n, q_0 e λ.

Agora basta fixar q_0; digamos, $q_0 = 1$. Assim, c_0 depende de k, n e λ. Donde segue ii). ∎

Estimativa de coeficientes de polinômios é o assunto da

Proposição 1.9 . *Sejam $k \ge 0$ e $q > 0$. Para todo polinômio $\pi(x) := \sum_{|\nu|\le k} c_\nu(x-x_0)^\nu \in P_k$ e todo cubo Q com $x \in Q \subset R^n$, existem uma constante c_1 dependendo de k, n, q e λ e outra constante c_2 dependendo de k, n e λ tais que*

$$i) \quad \sum_{|\nu|\le k}|c_\nu||Q|^{|\nu|/n} \le c_1\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q|\pi|^q\right)^{1/q} \quad \textit{se } q \textit{ é finito}$$

$$ii) \quad \sum_{|\nu|\le k}|c_\nu||Q|^{|\nu|/n} \le c_2\|\pi\|_{L^\infty(Q)} \qquad \textit{se } q = \infty\,.$$

Demonstração. Faremos a primeira simplificação. Se i) e ii) são válidos para um cubo contendo a origem $x_0 = 0$, por translação $y := x - x_0$, i) e ii) também valem para um cubo qualquer com $x_0 \neq 0$. Afinal, a integral em i), a norma $\|.\|_{L^\infty(Q)}$ em ii) e o volume de Q são invariantes por translações; o novo polinômio $\pi_0(y) := \sum_{|\nu|\le k} c_\nu y^\nu$ tem os mesmos coeficientes de $\pi(x)$.

Agora a segunda simplificação. O item ii) implica i).

De fato, pela *desigualdade de Gagliardo* (item ii) da **Proposição 1.7** com constante c e supondo válido ii), segue i) com $c_1 := c_2c$.

Assim, basta demonstrar $ii)$ para cubos contendo a origem. Provaremos $ii)$. Consideraremos vários cubos contendo a origem. Iremos utilizar o fato de P_k ter dimensão finita (conforme (**1.16**)) ; donde segue que quaisquer duas normas são equivalentes em P_k.

Uma norma do polinômio

$$\pi_1(x) = \sum_{|\nu| \leq k} c_\nu x^\nu \tag{1.17}$$

definido no cubo centrado na origem e de comprimento unitário $Q = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$ é dada pela *norma da soma*

$$\|\pi_1\|_\Sigma := \sum_{|\nu| \leq k} |c_\nu| .$$

A outra norma para π_1 é $\|\pi_1\|_{L^\infty(Q)}$.

Portanto, existe uma constante d_1 dependendo somente da dimensão de P_k (dada por (**1.16**)) tal que

$$\|\pi_1\|_\Sigma \leq d_1 \|\pi_1\|_{L^\infty(Q)} .$$

E isto é exatamente $ii)$ com $|Q|^{1/n} = 1$ e constante $c_2 := d$.

No caso do cubo $[\lambda, \lambda]^n$, aplicamos a mudança de variáveis de $[-\lambda, \lambda]^n$ em $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$ dada por $y := \frac{1}{2\lambda} x$ em (**1.17**). Logo,

$$\pi_2(y) = \sum_{|\nu| \leq k} c_\nu (2\lambda)^{|\nu|} y^\nu \quad \text{e} \quad \|\pi_2\|_\Sigma = \sum_{|\nu| \leq k} |c_\nu| . (2\lambda)^{|\nu|} .$$

Portanto, existe uma constante $\tilde{c}$ dependendo somente da dimensão de P_k (dada por (**1.16**)) tal que

$$\|\pi_2\|_\Sigma \leq \tilde{c} \|\pi_2\|_{L^\infty(Q)} . \tag{1.18}$$

(**1.18**) é exatamente $ii)$ com $|Q|^{1/n} = 2\lambda$ e a constante $c_2 := \tilde{c}$.

Para um cubo arbitrário $Q \ni 0$ com $l := |Q|^{1/n}$ tem-se $Q \subseteq [-l, l]^n =: \tilde{Q} \subset 3Q$.

Por (**1.18**) e pelo item $ii)$ da **Proposição 1.8** com constante d_2 seguem

$$\sum_{|\nu| \leq k} |c_\nu| l^{|\nu|} \leq \sum_{|\nu| \leq k} |c_\nu| (2\lambda)^{|\nu|} \leq \tilde{c} \|\pi\|_{L^\infty(\tilde{Q})} \leq \tilde{c} \|\pi\|_{L^\infty(3Q)} \leq \tilde{c} d_2 \|\pi\|_{L^\infty(Q)} .$$

Donde segue $ii)$ onde $c_2 := \tilde{c} d_2$. ■

1.5 Três Tipos de Funções e o Espaço de Lorentz[10]

Nesta seção apresentamos os conceitos de função distribuição, função rearranjo não crescente e função rearanjo maximal. Estas três funções possuem algumas semelhanças; por exemplo, todas as três possuem normas equivalentes a $\|.\|_{L^p(R^n)}$ para $1 < p \leq \infty$, mas somente a função rearranjo maximal satisfaz a desigualdade triangular. Estas e outras propriedades são os objetivos desta seção. Utilizamos as duas últimas funções para definir uma seminorma e uma norma, respectivamente, no espaço de Lorentz. A interpretação geométrica das duas primeiras funções podem ser encontradas em Bennett-Sharpley [2] ou em Benedeck-Murphy-Panzone [1].

[10] Mais informações sobre o assunto tratado nesta seção podem ser encontradas em Okikiolu [1], Oklander [1], Cotlar-Cignoli [1], Bennett-Sharpley [1], Sadosky [1], Stein-Weiss [1] e Stein [2].

1.5.1 Função Distribuição

Fixada uma função f mensurável em R^n, definimos o conjunto mensurável

$$E_f(\lambda) := \{x \in R^n : |f(x)| > \lambda > 0\}.$$

A *função distribuição* de f é definida pela medida do conjunto $E_f(\lambda)$, dada por

$$f_*(\lambda) := |E_f(\lambda)| = |\{x \in R^n : |f(x)| > \lambda\}|.$$

A função $f_*(\lambda)$ é não negativa, não crescente e contínua à direita (portanto, $f_*(\lambda)$ é uma função mensurável em $(0, \infty)$); conforme Wheeden-Zigmund [1] e Oklander [1].

Agora um exemplo. Consideremos a função característica $f = c\chi_A$ com $A \subset \Omega$ e medida $|A| = a < \infty$. Se $c \leq \lambda$, $f_*(\lambda)$ é zero; se $\lambda < c$, $f_*(\lambda)$ é $|A|$. Assim,

$$f_*(\lambda) = a\chi_{[0,c)}(\lambda).$$

A função distribuição não satisfaz a desigualdade triangular, isto é, não ocorre $(f+g)_*(\lambda) \leq f_*(\lambda) + g_*(\lambda)$ para toda todas as funções f e g e todo λ.

De fato, sejam o intervalo unitário $A = [0,1]$ da reta real e as funções $f = 4\chi_A$, $g = 2\chi_A$. Então $f + g = 6\chi_A$. Pelo exemplo acima, temos $f_* = \chi_{[0,4)}$, $g_* = \chi_{[0,2)}$, $(f+g)_* = \chi_{[0,6)}$. Agora basta escolher algum λ conveniente; por exemplo, $\lambda = 4$.

Aproveitamos o caso acima para mostrar que $|f| \leq |g| + |h|$ nem sempre implica $f_*(\lambda) \leq g_*(\lambda) + h_*(\lambda)$.

De fato, sejam as mesmas funções f e g e o conjunto A dados no exemplo acima, e ainda a função $h = 3\chi_A$ com $h_* = \chi_{[0,3)}$. Agora basta escolher algum λ conveniente; por exemplo, $\lambda = 3$.

No entanto, vale a seguinte

Proposição 1.10 . *Se $|f(x)| \leq \alpha|g(x)| + \beta|h(x)|$ com α e $\beta \in R$ e $x \in R^n$, então*

$$f_*[(\alpha+\beta)\lambda] \leq g_*(\lambda) + h_*(\lambda) \qquad \textit{para } \lambda > 0.$$

Demonstração. Se $|f(x)| > (\alpha+\beta)\lambda$ então $|g(x)| > \lambda$ ou $|h(x)| > \lambda$. Caso contrário, se $|g(x)| \leq \lambda$ e $|h(x)| \leq \lambda$ teríamos $|f(x)| \leq \alpha|g(x)| + \beta|h(x)| \leq (\alpha+\beta)\lambda$; contradição.

Para obter a proposição basta comparar as medidas dos conjuntos

$$\{x \in R^n : |f(x)| > (\alpha+\beta)\lambda\} \subseteq \{x \in R^n : |g(x)| > \lambda\} \bigcup \{x \in R^n : |h(x)| > \lambda\}. \qquad \blacksquare$$

Dada uma função $f \in L^p(R^n)$ com $0 < p < \infty$ tem-se

$$\int_{R^n} |f|^p \geq \int_{E_f(\lambda)} |f|^p \geq \int_{E_f(\lambda)} \lambda^p = \lambda^p |E_f(\lambda)| \qquad \text{para todo } \lambda > 0,$$

isto é,

$$f_*(\lambda) \leq \frac{\|f\|^p_{L^p(R^n)}}{\lambda^p} \qquad \text{para todo } \lambda > 0. \tag{1.19}$$

(**1.19**) é a *desigualdade de Chebyshev* e diz que o "tamanho" de f é limitado por uma cota superior dependendo da norma de f.

A desigualdade de Chebyshev fornece informações sobre o comportamento de f_*.

De fato, por (**1.19**) segue

$$\lim_{\lambda \to \infty} f_*(\lambda) = 0. \tag{1.20}$$

Uma das utilidades da função distribuição é relacionar $f_*(\lambda)$ com a norma de f em $L^p(R^n)$ no

Teorema 1.11 . *Se f é mensurável então*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{R^n} |f|^p \ = \ \int_0^\infty p\lambda^{p-1} f_*(\lambda) d\lambda \qquad para\ 0 < p < \infty \\ \\ \|f\|_{L^\infty(R^n)} \ = \ \inf\{\lambda > 0 : f_*(\lambda) = 0\} \ = \ \sup\{\lambda > 0 : f_*(\lambda) \neq 0\} \qquad para\ p = \infty\,. \end{cases}$$

Demonstração. Bennett-Sharpley [2] ou Wheeden-Zigmund [1] ou Oklander [1] . ■

Segundo Stein [2], todo conceito relacionado exclusivamente com o "tamanho" de f pode ser expresso em termos de f_*. Um exemplo é o **Teorema 1.11**.

Diremos que duas funções f e g (podendo serem definidas em distintos espaços com medida) são *equimensuráveis* se possuem a mesma função distribuição.

Com esta definição, o **Teorema 1.11** fornece a igualdade de normas em $L^p(R^n)$, com $1 \leq p \leq \infty$, para duas funções equimensuráveis.

Dada uma função f existem muitas funções g tal que $f_* = g_*$; basta tomar g como sendo f redefinida em conjuntos de medida nula. Portanto, a função distribuição não detecta alterações em f realizadas em conjuntos de medida nula.[11]

O próximo objetivo é obter uma função que seja equimensurável a f.

1.5.2 Função Rearranjo Não Crescente[12]

Rearranjo em ordem não crescente para uma seqüência de elementos com número finito de termos é fácil de realizar e pode ser visto em Bennett-Sharpley [2]. Se a quantidade de termos for infinito já é outro caso; sugerimos Hardy-Littlewood-Pólya [1]. Formularemos essa idéia aplicada a uma função.

Para todo $s \geq 0$, definimos

$$f^*(s) := \inf\{\lambda > 0 : f_*(\lambda) \leq s\}\,. \tag{1.21}$$

A função $f^*(s)$ é não negativa, não crescente e contínua à direita; conforme Oklander [1] e Stein-Weiss [1] (portanto, $f^*(s)$ é mensurável) e é chamada *rearranjo não crescente* de f em R^+.

Por exemplo, a função distribuição de f^* é dada por

$$(f^*)_*(\lambda) := |\{s \in R^+ : f^*(s) > \lambda\}| = \sup\{s \geq 0 : f^*(s) > \lambda\}\,. \tag{1.22}$$

Em (**1.22**), a segunda igualdade provém do fato de f^* ser não crescente.

A seguinte afirmação pode ser encontrada, por exemplo, em Oklander [1], Sadosky [1] ou Bennett-Sharpley [2]:

$$f_*(\lambda) = (f^*)_*(\lambda) \qquad \text{para todo } \lambda > 0\,. \tag{1.23}$$

Donde vem a equimensurabilidade entre f e f^*.

Vejamos duas aplicações de (**1.22**). A primeira é a

---

[11]Existe uma classe de funções onde os elementos são caracterizados pela equimensurabilidade. Mais precisamente, seja $\mathcal{A}$ a classe das funções ≥ 0, não crescentes, contínua à direita e definidas em $R^+ = (0,\infty)$. Considerando f e g elementos de $\mathcal{A}$ segue $f_* = g_* \Longleftrightarrow f = g$ (esta equivalência está provado em Cotlar-Cignoli [1]). E isto permitirá caracterizar de maneira única uma função equimensurável a uma dada função f (o enunciado e a prova deste resultado está também em Cotlar-Cignoli [1]).

[12]A teoria dos rearranjos não crescentes de funções foi introduzida por Hardy e Littlewood em 1930 como conseqüência do estudo de rearranjos para séries. Bennett-Sharpley [2] acrescenta que esses rearranjos já eram utilizados por J.Steiner em 1881 e H.A.Schwarz em 1884. Há várias definições equivalentes de rearranjos não crescentes. A definição dada nesta seção está em termos de função distribuição, e continua válida em espaços de medidas mais gerais conforme Okikiolu [1]. A técnica dos rearranjos é aplicável a operadores definidos por convolução; Okikiolu [1].

Proposição 1.12 . *Se $f^* = 0$ então $f = 0$ quase sempre.*

Demonstração. Se $f^*(s) = 0$ para todo $s \in R^+$ então, por (**1.22**), tem-se $(f^*)_*(\lambda) = |\emptyset| = 0$ para todo $\lambda > 0$; sendo f e f^* equimensuráveis segue $f_*(\lambda) = 0$ para todo $\lambda > 0$. Agora basta aplicar o **Teorema 1.11** com $p = 1$. ■

Para a outra aplicação de (**1.22**) consideremos $s \geq 0$. Definimos $\lambda := f^*(s)$. Tomemos uma seqüência $\lambda_m \downarrow \lambda$ com $f_*(\lambda_m) \leq s$ para todo $m \in N$. Pela continuidade à direita de f_* seguem

$$f_*(f^*(s)) = f_*(\lambda) = \lim_{m \to \infty} f_*(\lambda_m) \leq s .$$

Acabamos de provar o seguinte resultado crucial que será utilizado nos capítulos seguintes, em certas estimativas.

Proposição 1.13 . *Se f é uma função mensurável então*

$$f_*(f^*(s)) \; = \; |\{x \in R^n : |f(x)| > f^*(s)\}| \; \leq \; s \qquad \textit{para todo } s \geq 0 . \quad ■$$

Corolário 1.14 . $\|f\|_{L^p(R^n)} = \|f^*\|_{L^p(R^+)}$ *se* $0 < p < \infty$; $\|f\|_{L^\infty(R^n)} = f^*(0)$ *se* $p = \infty$.

Demonstração . Basta aplicar (**1.23**) no **Teorema 1.11**. ■

A função rearranjo não crescente também não satisfaz a desigualdade triangular $(f+g)^*(s) \leq f^*(s) + g^*(s)$ para todo $s \geq 0$.

De fato, para $f = \chi_{[0,1)}$ e $g = \chi_{[2,3)}$ tem-se $f^* = g^* = \chi_{[0,1)}$ e $(f+g)^* = \chi_{[0,2)}$. Basta escolher um λ conveniente; por exemplo, $\lambda = 1$.

No entanto, vale a seguinte

Proposição 1.15 . *i) Para todo $s_1 \geq 0$ e $s_2 \geq 0, (f+g)^*(s_1 + s_2) \leq f^*(s_1) + g^*(s_2)$.*
ii) Se $|f(x)| \leq |g(x)|$ para todo $x \in \Omega$ então $f^*(s) \leq g^*(s)$, onde $s \geq 0$.

Demonstração. Basta tomar o ínfimo sobre os $\lambda > 0$ nas inclusões

$$\begin{cases} \{\lambda : f_*(\lambda/2) \leq s_1\} \bigcap \{\lambda : g_*(\lambda/2) \leq s_2\} \subseteq \{\lambda : (f+g)_*(\lambda) \leq s_1 + s_2\} \\ \\ \{\lambda : f_*(\lambda) \leq s\} \subseteq \{\lambda : g_*(\lambda) \leq s\} . \quad ■ \end{cases}$$

Proposição 1.16 . *Sejam $f : R^n \to R$ uma função mensurável e $A \subseteq R^n$ um conjunto mensurável com medida $|A|$ finita ou não. Então*

$$\int_A |f(x)| dx \leq \int_0^{|A|} f^*(s) ds .$$

Em particular, vale a igualdade na proposição acima quando: $i)$ A tiver medida infinita; e isto se reduz ao **Corolário 1.14** com $p = 1$; $ii)$ $A = E_f(\lambda)$, onde $E_f(\lambda)$ foi definida na **subseção 1.5.1**; para verificar este caso indicamos Oklander [1].

Demonstração da Proposição 1.16. (Oklander [1]) Pela observação $i)$ acima, podemos supor A tendo medida finita. Neste caso, podemos definir uma função auxiliar $g := f\chi_A$; logo, $|g(x)| \leq |f(x)|$ para todo $x \in R^n$.. Pela **Proposição 1.15** item $ii)$, tem-se $g^*(s) \leq f^*(s)$ para todo $s \geq 0$.

Por outro lado, estimaremos $g^*(s)$ para todo $s \geq 0$. Começamos estimando

$$g_*(\lambda) = |\{x \in R^n : |g(x)| > \lambda\}| = |\{x \in A : |f(x)| > \lambda\}| \leq |A| \quad \text{para todo } \lambda > 0 .$$

Assim, pela relação acima, a função rearranjo não crescente de g vale

$$g^*(s) = \inf\{\lambda ; g_*(\lambda) \leq s\} = 0 \quad \text{se } |A| \leq s .$$

Portanto, pelos resultados acima e do **Corolário 1.14**, seguem

$$\int_A |f(x)|dx = \int_{R^n} |g(x)|dx = \int_0^\infty g^*(s)ds = \int_0^{|A|} g^*(s)ds \leq \int_0^{|A|} f^*(s)ds .$$

E obtivemos a proposição. ■

1.5.3 Função Rearranjo Maximal

Dada uma função f tem-se a função rearranjo não crescente f^*. Definimos a *função rearranjo maximal* como sendo a média de f^* no intervalo real $(0, t]$ para $t > 0$, isto é,

$$f^{**}(t) := \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds . \tag{1.24}$$

Proposição 1.17 . *i)* $f^{**}(t) \leq \|f\|_{L^\infty(R^n)}$ *ii)* $f^{**}(t) \leq \frac{1}{t}\int_0^\infty f^*(s)ds$ *iii)* $f^{**}(t) \leq \frac{1}{t}\|f\|_{L^1(R^n)}$.

Demonstração. Os itens *i)*, *ii)* e *iii)* são conseqüências de (**1.24**) e das igualdades $\|f^*\|_{L^\infty(R^+)} = \|f\|_{L^\infty(R^n)}$ e $\|f^*\|_{L^1(R^+)} = \|f\|_{L^1(R^n)}$ verificadas no **Corolário 1.14**. ■

Daremos duas versões da função rearranjo maximal. A primeira versão é obtida fazendo $\xi := s/t$ em (**1.24**). Na forma

$$f^{**}(t) = \int_0^1 f^*(t\xi)d\xi$$

segue que $f^{**}(t)$ é função não crescente e satifaz

Proposição 1.18 . *i)* $f^*(t) \leq f^{**}(t)$ *para todo* $t > 0$; *ii)* $f^*(t) \leq \frac{1}{t}\|f\|_{L^1(R^n)}$.

Demonstração . Mostraremos *i)*. Se $0 \leq \xi \leq 1$ e $t > 0$ então $0 \leq t\xi < t$. Assim, $f^*(t) \leq f^*(t\xi)$ para todo $0 \leq \xi \leq 1$. Uma integração sobre $[0,1]$ prova *i)*. O item *ii)* segue de *i)* e da **Proposição 1.17** item *iii)*. ■

A segunda versão tem a finalidade de mostrar a desigualdade triangular para a função rearranjo maximal. Segundo Calderón [1], Stein-Weiss [1] e Bagby [2] , para $E \subset R^n$ vale

$$f^{**}(t) = \sup_{|E| \leq t} \frac{1}{t}\int_E |f(x)|dx . \tag{1.25}$$

Nessa forma segue imediatamente a desigualdade triangular

$$(f+g)^{**}(t) \leq f^{**}(t) + g^{**}(t) . \tag{1.26}$$

Além disso, se $c \in R^n$ é escalar, vale $(cf)^{**}(t) = |c|f^{**}(t)$ para todo $t > 0$. Portanto, o operador $** : f \mapsto f^{**}$ é sublinear.

Vejamos a equivalência das normas em $L^p(R^n$ ou R^+, conforme o caso) de f, f^* e f^{**}.

Proposição 1.19 . *Se* $1 < p \leq \infty$ *então*

$$\|f\|_{L^p(R^n)} = \|f^*\|_{L^p(R^+)} \leq \|f^{**}\|_{L^p(R^+)} \leq \frac{p}{p-1}\|f^*\|_{L^p(R^+)} = \frac{p}{p-1}\|f\|_{L^p(R^n)}.$$

Demonstração. (Oklander [1]) Basta verificar as três primeiras desigualdades. A quarta é conseqüência da primeira.

Se p é finito, as três primeiras desigualdades seguem do **Corolário 1.14**, item i) da **Proposição 1.18** e item i) do **Teorema 1.3** com $r = 0$ aplicado a (**1.24**), respectivamente.

Se p é infinito, convencionaremos $\frac{\infty}{\infty - 1} = 1$ e as três primeiras desigualdades seguem do **Corolário 1.14**, item i) da **Proposição 1.18** e item ii) da **Proposição 1.17** combinado com o **Corolário 1.14**, respectivamente. ■

1.5.4 Espaço de Lorentz[13]

O **Teorema 1.11** teve o propósito de obter

$$\int_{R^n} |f|^p = \int_0^\infty |f^*(s)|^p ds = \int_0^\infty |s^{1/p} f^*(s)|^p \frac{ds}{s}.^{14} \tag{1.27}$$

Isto sugere as seguintes definições para a *seminorma* de uma função mensurável

$$\begin{cases} |f|^*_{L(p,q)} := \left(\int_0^\infty [s^{1/p} f^*(s)]^q \dfrac{ds}{s}\right)^{1/q} & \text{se } 0 < q < \infty \\ \\ |f|^*_{L(p,\infty)} := \sup\limits_{s \geq 0} \{s^{1/p} f^*(s)\} & \text{se } q = \infty \end{cases}$$

onde $0 < p \leq \infty$ com a convenção $1/\infty = 0$.[15]

O conjunto $\{f$ mensurável em $R^n : |f|^*_{L(p,p)}$ é finito $\}$ é chamado *espaço de Lorentz*, denotado por $L(p, q)$.[16]

Em geral, o funcional $|f|^*_{L(p,q)}$ não é uma norma pois f^* não satisfaz a desigualdade triangular (conforme exemplo apresentado na **subseção 1.5.2**); veremos adiante que $|f|^*_{L(p,q)}$ será equivalente a uma norma para $L(p, q)$ quando $p = q = 1$ ou $1 < p \leq \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$. Assim, este se torna um espaço de Banach.

Em particular valem:

i) se $p = q$ então $L^p(R^n) = L(p, p)$ com $\|.\|_{L^p(R^n)} = |.|^*_{L(p,p)}$ para $0 < p \leq \infty$.

ii) Para q finito, $L(\infty, q)$ contém somente a função nula.

De fato, utilizaremos a sugestão dada por Hunt [1]. Para verificar esta afirmação é suficiente mostar que $f^*(s) = 0$ para todo $s \geq 0$ e utilizar a **Proposição 1.12**. Mostraremos agora $f^*(s) = 0$ para todo $s \geq 0$. Por contradição, suponhamos $f^*(b) \neq 0$ para algum $b > 0$. Logo, pela propriedade de f^* ser função não crescente,

$$\infty > \int_0^\infty f^*(s)^q \frac{ds}{s} \geq \lim_{a \to 0} \int_a^b f^*(s)^q \frac{ds}{s} \geq f^*(b)^q \lim_{a \to 0} \int_a^b \frac{ds}{s} = f^*(b)^q \lim_{a \to 0} \ln\left|\frac{b}{a}\right| = \infty.$$

---

[13] O *espaço de Lorentz* foi introduzido e generalizado por G.G.Lorentz em 1950 e 1953, respectivamente, conforme Bergh-Löfströn [1].

[14] Uma interpretação alternativa para a notação ds/s é dt/t = medida de Haar em relação ao grupo multiplicativo dos pontos $t \in (0, \infty)$, conforme Butzer-Berens [1].

[15] Os casos $q = 1$ e $q = \infty$ foram estudados, formalmente, por G. G. Lorentz em 1950. Calderón introduziu o espaço $L(p, q)$ para $1 < p < \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$ com a finalidade de generalizar o *teorema de Marcinkiewicz* e sua relação com o *teorema de Riesz-Thorin.*

[16] O tratamento clássico do *espaço de Lorentz* é dado por Hunt [1].

Contradição. Assim $f(s) = 0$ para todo $s > 0$. Falta mostrar que $f(0)$ também é nulo; mas isto segue pela continuidade à direita de $f^*(s)$.

iii) o *espaço de Marcinkiewicz* é $L_*^p := L(p,\infty)$ com $|.|_{L_*^p} = |.|_{L(p,\infty)}^*$ para $0 < p \leq \infty$.

iv) O espaço L_*^1 é completo e não normável; conforme Sadosky [1] e Bergh-Löfströn [1].

Expressaremos a seminorma de Marcinkiewicz $|f|_{L_*^p}$ em termos de f^* e f_* quando p é finito.

Sendo $\lambda = f^*(s)$ essencialmente a função inversa de $s = f_*(\lambda)$, conforme Benedeck-Murphy-Panzone [1] e Cotlar-Cignoli [1], tem-se

$$|f|_{L_*^p} = \sup_{s \geq 0}\{s^{1/p} f^*(s)\} = \sup_{\lambda > 0}\{f_*(\lambda)^{1/p}\lambda\}. \tag{1.28}$$

Podemos relacionar as normas de L_*^p e $L^p(R^n)$ quando p for finito.

De fato, para $0 < p < \infty$ utiliza-se (**1.19**) e (**1.28**) para produzir

$$|f|_{L_*^p} \leq \|f\|_{L^p(R^n)}. \tag{1.29}$$

Em relação à (**1.29**), Marcinkiewicz mostrou que algumas desigualdades clássicas ainda valem se $\|f\|_{L^p(R^n)}$ for substituída por $|f|_{L_*^p}$ conforme Cotlar-Cignoli [1].

O espaço L^p-fraco consiste das funções mensuráveis f em R^n tal que existe uma constante $c(f)$ dependendo de f tal que

$$f_*(\lambda) = |\{x \in R^n; |f(x)| > \lambda\}| \leq \frac{[c(f)]^p}{\lambda^p} \quad \text{para todo } \lambda > 0. \tag{1.30}$$

(**1.19**) e (**1.29**) implicam $L^p(R^n) \subseteq L^p$-fraco e $L^p(R^n) \subseteq L_*^p$, respectivamente. Na verdade,

$$L^p\text{-fraco} = L_*^p.$$

De fato, vejamos a inclusão L^p-fraco $\subseteq L_*^p$. Seja $f \in L^p$-fraco. Por (**1.28**) e (**1.30**) segue $|f|_{L_*^p} \leq c(f) < \infty$. Vejamos a outra inclusão. Seja $f \in L_*^p$. Então, por (**1.28**), segue

$$f_*(\lambda)^{1/p}\lambda \leq \sup_{\lambda > 0}\{f_*(\lambda)^{1/p}\lambda\} = |f|_{L_*^p}.$$

Donde,

$$f_*(\lambda) \leq \frac{|f|_{L_*^p}^p}{\lambda^p}$$

Basta tomar $c(f) := |f|_{L_*^p}$ e isto finaliza a afirmação.

A inclusão $L^p(R^n) \subsetneq L^p$-fraco é estrita.[17]

Vale também: $L^p(R^n) \subsetneq L^p$-fraco$\subsetneq L_{loc}^q(R^n)$ para $1 \leq q < p < \infty$; conforme Journé [1].

Seja T um operador *tipo fraco (p,q)* levando $L^p(R^n)$ limitadamente sobre L^q-fraco, isto é, existe uma constante c dependendo somente de p e q satisfazendo $\lambda[(Tf)_*(\lambda)]^{1/q} \leq c\|f\|_{L^p(R^n)}$ para todo $\lambda > 0$ e f em $L^p(R^n)$. Tomando o supremo para $\lambda > 0$ tem-se, por (**1.28**), que $Tf \in L_*^q$ e $|Tf|_{L_*^q} \leq c\|f\|_{L^p(R^n)}$. Assim, um operador *tipo fraco (p,q)* leva $L^p(R^n)$ limitadamente sobre L_*^q. Por essa razão a classe L_*^q é chamado de L^q-fraco.

As imersões do espaço de Lorentz $L(p,q)$ podem ser obtidas quando fixamos o parâmetro p e variamos o segundo parâmetro q. Vejamos.

---

[17] Sadosky [1] apresenta o seguinte exemplo na reta R onde essa inclusão é estrita. Seja $f(x) := x^{-1/p}\chi_{(0,1)}(x)$. É realmente simples verificar que $f \notin L^p(R)$. Mais simples ainda é verificar que $f \in L_*^p$. Vejamos: $f_*(\lambda) = |\{x \in R : |f(x)| > \lambda\}| = |\{x \in (0,1) : x^{-1/p} > \lambda\}| = |\{x \in (0,1) : x < \lambda^{-p}\}| =$ medida do intervalo $(0,\lambda^{-p}) = \lambda^{-p}$. Neste exemplo, (**1.28**) implica $|f|_{L_*^p} = \sup_{\lambda > 0}\{f_*(\lambda)^{\frac{1}{p}}\lambda\} = 1$.

Fixado $0 < p \leq \infty$. Se $0 < q \leq r \leq \infty$ então $L(p,q) \hookrightarrow L(p,r)$.[18] Este resultado está provado em Hunt [1], Stein-Weiss [1] e Calderón [2].

Em particular, resulta $L(p,1) \hookrightarrow L^p(R^n) \hookrightarrow L(p,\infty)$ para todo $0 < p \leq \infty$.

A seminorma $|.|^*_{L(p,q)}$ é uma norma se e somente se $1 \leq p = q \leq \infty$; conforme Okikiolu [1]. Queremos definir uma norma em $L(p,q)$ para outros valores de p e q. Como $|.|^*_{L(p,p)} = \|.\|_{L^p(R^n)}$, onde $1 \leq p \leq \infty$, já é uma norma em $L(p,p)$, seria conveniente que a norma a ser introduzida em $L(p,q)$ fosse relacionada a $|.|^*_{L(p,q)}$ para $1 < p \leq \infty, 1 \leq q \leq \infty$ e $p = q = 1$.[19] Esse será o próximo objetivo.[20]

Com a convenção $1/\infty = 0$, as *normas* usuais em $L(p,q)$ para $1 < p \leq \infty$ são

$$\begin{cases} \|f\|_{L(p,q)} := \left(\int_0^\infty [s^{\frac{1}{p}} f^{**}(s)]^q \frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q}} & \text{se} \quad 1 \leq q < \infty \\ \\ \|f\|_{L(p,\infty)} := \sup_{s>0} \{s^{\frac{1}{p}} f^{**}(s)\} & \text{se} \quad q = \infty . \end{cases}$$

Se $p = \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$, pela **Proposição 1.18** item $i)$, tem-se $|f|^*_{L(\infty,q)} \leq \|f\|_{L(\infty,q)}$.

Se $p = q = \infty$, por (**1.24**), tem-se $\|f\|_{L(\infty,\infty)} \leq |f|^*_{L(\infty,\infty)}$.

Se $q = 1$ e $1 < p < \infty$ então, por (**1.24**) e uma mudança na ordem de integração,

$$\begin{aligned} \|f\|_{L(p,1)} &= \int_0^\infty f^{**}(s) s^{\frac{1}{p}-1} ds = \int_0^\infty \int_0^s f^*(\xi) s^{\frac{1}{p}-2}\, d\xi\, ds \\ &= \int_0^\infty \int_\xi^\infty f^*(\xi) s^{\frac{1}{p}-2}\, ds\, d\xi = \frac{p}{p-1} |f|^*_{p1} . \end{aligned}$$

Com isso obtivemos os itens $ii)$ e $iii)$ da

Proposição 1.20 . *i) Se* $1 < p < \infty$ *e* $1 \leq q \leq \infty$ *então* $|f|^*_{L(p,q)} \leq \|f\|_{L(p,q)} \leq \frac{p}{p-1} |f|^*_{L(p,q)}$.
ii) Se $p = \infty$ *e* $1 \leq q \leq \infty$ *então* $|f|^*_{L(\infty,q)} \leq \|f\|_{L(\infty,q)}$. *A igualdade ocorre para* $p = q = \infty$.
iii) Se $q = 1$ *e* $1 < p < \infty$ *então* $\|f\|_{L(p,1)} = \frac{p}{p-1} |f|^*_{L(p,1)}$.

Demonstração. Falta mostrar $i)$. A primeira desigualdade provém da **Proposição 1.18** item $i)$ seja q finito ou não; a segunda, é a *desigualdade de Hardy* (**Proposição 1.3** item $i)$ com $r = \frac{q}{p} - 1$) se q é finito. Quando $q = \infty$, pela definição de $|.|^*_{L(p,\infty)}$ segue $f^*(s) \leq |f|^*_{L(p,\infty)} s^{-1/p}$ para todo $s > 0$. Logo

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s) ds \leq \frac{1}{t} |f|^*_{L(p,\infty)} \int_0^t s^{-1/p} ds \leq \frac{p}{p-1} t^{-1/p} |f|^*_{L(p,\infty)} .$$

Ou seja,

$$t^{1/p} f^{**}(t) \leq \frac{p}{p-1} |f|^*_{L(p,\infty)} .$$

Tomando o supremo para todo $t > 0$ obtém-se o desejado. ■

Encerraremos esta seção com um comentário. O *espaço de Riesz* $L^p(\Omega)$ e o *espaço de Marcinkiewicz* $L^p_*(\Omega)$ são casos particulares do *espaço de Lorentz* $L(p,q)$. Uma das generalizações de $L(p,q)$ é o

---

[18] Em relação ao espaço $L^p(\Omega)$, se $1 \leq p \leq r \leq \infty$ e medida de Ω é finita então $L^r(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$; isto segue pela *desigualdade de Hölder*. A finitude da medida de Ω é essencial. Portanto, ao variarmos o parâmetro p no **Teorema 1.18**, será natural impor a condição da medida de Ω ser finita. Assim, exigindo a finitude da medida de Ω juntamente com $0 < p \leq r \leq \infty$ e o $0 < q \leq s \leq \infty$ segue $L(r,s) \hookrightarrow L(r,\infty) \hookrightarrow L(p,q)$; conforme Hunt [1].

[19] Mais ainda, $L(p,q)$ não pode ser espaço normado se $p = 1$ e $1 < q \leq \infty$; segundo Stein-Weiss [1].

[20] Oklander [1] salienta que essa é a principal razão para motivar a apresentação da função rearrajo maximal pois esta satisfaz a desigualdade triangular (**1.26**).

espaço de Orlicz que pode ser visto em Bennett-Sharpley [2] e Adams [1]. Outra generalização é o *espaço de Lorentz-Zigmund* $L^{pq}(\log\ L)^\alpha$ introduzido por C. Bennett e K. Rudnick em 1980; conforme Bennett-Sharpley [1]; e este espaço contém também *espaço de Zigmund*.

Merucci [1] generalizou o espaço $L^{pq}(\log\ L)^\alpha$.

1.6 Diferenciação de Integrais e Função Maximal de Hardy-Littlewood[21]

1.6.1 Diferenciação de Integrais

Segundo R.Feffermann [1], teoremas sobre diferenciação de integrais são equivalentes a teoremas maximais.

Os teoremas maximais podem ser, basicamente, obtidos através de dois métodos: a transformada de Fourier e lemas de coberturas.

Sob esse segundo ponto de vista, M. de Guzmán [1] e [5] entende a teoria de diferenciação de integrais como sendo a combinação de propriedades de coberturas e propriedades de diferenciação de certas famílias de conjuntos. Na verdade, essa combinação é uma equivalência,

$$\text{propriedades de diferenciação} \iff \text{propriedades de cobertura}\ .$$

1.6.1.1 Propriedades de Diferenciação

Para cada $x \in R^n$, seja $\mathcal{B}(x)$ a coleção de conjuntos B mensuráveis, limitados, contendo x e de medida positiva tal que existe seqüência $\{B_j\}_{j\in N} \subset \mathcal{B}(x)$ com diâmetro de $B_j \downarrow 0$. A coleção $\mathcal{B} := \bigcup_{x\in R^n} \mathcal{B}(x)$ é chamada *base de diferenciação.*

Reciprocamente, se para cada $B \in \mathcal{B}$ e $x \in B$ tivermos $B \in \mathcal{B}(x)$, a base $\mathcal{B}$ é chamada *base de Busemann-Feller* apresentada por H.Busemann e W.Feller em 1934.

Em Guzmán [1] apresenta-se o seguinte resultado: se $\mathcal{B}(x)$ são cubos ou esferas ou paralelepípedos; todos contendo ou centrados em x, então $\mathcal{B}$ é base de diferenciação. As bases $\mathcal{B}$ formadas por esses conjuntos contendo x são bases de Busemann-Feller; os centrados em x, não. Sugerimos também Guzmán [3] e [2].

1.6.1.2 Propriedades de Cobertura

Resultados referentes a propriedades de cobertura são conhecidos como lemas de cobertura. O teorema de Heine-Borel de 1895 pertence à classe com propriedades de cobertura. Outros resultados com propriedades de cobertura são os lemas de Vitali de 1908, de Besicovitch de 1945 e 1946 e sua generalização por A.P.Morse em 1947 e de Whitney em 1934. Estes resultados podem ser utilizados em outras áreas. Por exemplo no teorema de Sard[22] sobre pontos críticos de uma função, e sua generalização por Guzmán em 1972. Este parágrafo está desenvolvido em Guzmán [1].

O lema de Besicovitch é importante na teoria da diferenciação.

O lema de Vitali é uma consequência do lema de Besicovitch; conforme Guzmán [5]. Na próxima seção apresentaremos um lema de tipo Vitali, versão para cubos diádicos.

[21] Esta seção está baseado em Sadosky [1], Okikiolu [1], Cotlar-Cignoli [1], Stein-Weiss [1], Journe [1], Stein [2] e Guzmán [1]. Um esboço das idéias clássicas sobre funções maximais, teoremas de diferenciação, integrais singulares, suas interrelações e aplicações pode ser encontrado em Stein-Wainger [1].

[22] Um resultado relacionado às hipóteses do Teorema de Sard pode ser encontrado em Grimberg [1].

1.6.1.3 Teorema de Diferenciação de Lebesgue Clássico[23]

O próximo teorema é um resultado clássico na teoria de diferenciação de integrais com uma modificação. Na versão original tem-se esferas abertas centradas em $x \in R^n$ com raio tendendo a zero. Uma prova encontra-se em Guzmán [5] como conseqüência do lema de cobertura de Besicovitch.

Teorema 1.21 . (Teorema de Lebesgue para diferenciação de integrais) *Seja f uma função localmente integrável em R^n. Então, para quase todo $x \in R^n$, vale*

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{|Q(x,r)|} \int_{Q(x,r)} f(y)dy = f(x) \tag{1.31}$$

onde $Q(x,r)$ é um cubo aberto não degenerado centrado em $x \in R^n$ com lados de comprimento r paralelos aos eixos coordenados.

Uma indicação para a demonstração do **Teorema 1.21** será dada na próxima subseção.

Uma terceira prova do **Teorema 1.21** pode ser obtida pelo método da rotação. Esse método foi introduzido por Calderón-Zygmund em 1956 no estudo de operadores integrais singulares. Essa prova não utiliza propriedades de cobertura; conforme Guzmán [5]. O método da rotação também é descrito em Torchinsky [1].

Poderia se pensar que (**1.31**) ainda aconteça para conjuntos mais gerais "contraindo" para x. Era o que se pensava até que o exemplo de H.Bohr, para retângulos de R^2 de lados paralelos aos eixos, fosse apresentado em 1927 num artigo de C.Carathéodory. Versão simplificada do exemplo de H.Bohr pode ser visto em Guzmán [1]. Apareceram resultados em duas direções. A primeira direção é determinar as classes de conjuntos que poderiam substituir as esferas originais $S(x,r) := \{y \in R^n; |x-y| < r\}$ em (**1.31**). S.Saks[24] apresentou dois resultados: o primeiro, afirmativamente, em 1933 com seu teorema de densidade forte e o segundo, negativamente, em 1934 provando a existência de uma função em R^n tal que (**1.31**) vale para esferas mas não para paralelepípedos. A outra direção é determinar sobre para quais espaços, no lugar de $L^1(R^n)(\subseteq L^1_{loc}(R^n))$, ainda vale (**1.31**). Responderam afirmativamente, A.Zygmund em 1934 para os espaços $L^p(R^n), 1 < p \leq \infty$ e B.Jessen, J.Marcinkiewicz e A.Zygmund em 1935 para o espaço $L(1+log^+L)^{n-1}(R^n)$. A.Zygmund em 1967 mostrou que resultados de B.Jessen, J.Marcikiewicz e A.Zygmund ainda valem para $L(1+log^+L)^{n-s}(R^n)$. Este parágrafo é desenvolvido num contexto mais geral em Guzmán [3]; sugerimos também Zygmund [1].

No final desta seção apresentaremos uma caracterização do espaço $L(1+log^+L)(R^n)$.

Por outro lado, a substituição de $Q(x,r)$, em (**1.31**), pela sua fronteira "contraindo" para x e considerando área em vez de volume podem produzir resultados distintos em (**1.31**); conforme Stein-Wainger [1]. Em geral, a substituição de $Q(x,r)$ em (**1.31**) por outros conjuntos recebeu muita atenção nos anos 1930, segundo Stein-Wainger [1] onde esses autores citam o trabalho de Busemann e Feller de 1934 nessa área.

Apesar desse problema, é conveniente formalizar as definições em termos de cubos centrados.

A seguir analisaremos o comportamento da média $\frac{1}{|Q(x,r)|}\int_{Q(x,r)} f(y)dy$ tomando o supremo sobre os cubos $Q(x,r)$. Isto é o oposto ao que foi feito em (**1.31**) onde $Q(x,r) \downarrow x$. Mesmo assim obtemos resultados referentes a diferenciação de integrais. Zygmund [2] comenta que é uma lástima Hermann Weyl, em 1909, não haver desenvolvido a idéia pioneira de substituir *lim* por *sup*.

[23]A. S. Besicovitch foi um dos fundadores da moderna teoria local de diferenciação, conforme Guzmán [3].

[24]Uma bilbiografia de Saks é dada em Zygmund [3].

1.6.2 Função Maximal[25]

Funções maximais são obtidos em termos de supremos segundo determinados parâmetros. A finalidade desta seção é apresentar o operador maximal de Hardy-Littlewood juntamente com o teorema maximal de Hardy-Littlewood.

Fornecemos a equivalência entre a função rearranjo maximal da função maximal de Hardy-Littlewood com a função maximal f^{**}. Como conseqüência, demonstramos o teorema de diferenciação de Lebesgue.

Encerramos o capítulo, caracterizando o espaço de Zygmund via função maximal de Hardy-Littlewood.

1.6.2.1 Operador Maximal

Funções maximais são geralmente definidas em termos de supremos calculados sobre determinados parâmetros.

Proposição 1.22 .[26] *Sejam* $1 \leq p < \infty$ *e* $\{f_m : R^n \to R; m \in N\}$ *uma sequência de funções mensuráveis (não necessariamente em* $L^p(R^n)$ *) satisfazendo* $\lim_{m\to\infty} f_m(x) = f(x)$ *para quase todo* $x \in R^n$ *com* função maximal da sequência $\{f_m; m \in N\}$ *dada por* $M_0(x) := \sup_{m\in N} |f_m(x)| \in L^p(R^n)$.

Então $f_m \in L^p(R^n)$ *para todo* $m \in N$, $f \in L^p(R^n)$ *e*

$$\lim_{m\to\infty} \int_{R^n} |f_m(x) - f(x)|^p dx = 0 .$$

Demonstração . Seja $1 \leq p < \infty$. Fixado x, a relação $|f_m(x)|^p \leq M_0(x)^p$ para todo m implica $|f(x)|^p \leq M_0(x)^p$.

Assim, $\{f_m^p : m \in N\} \subset L(R^n)$ e $f^p \in L^p(R^n)$ pois $M_0 \in L^p(R^n)$ por hipótese.

Por outro lado, valem

$$\lim_{m\to\infty} |f_m(x) - f(x)|^p = \left[\lim_{m\to\infty} |f_m(x) - f(x)|\right]^p = 0$$

e

$$|f_m(x) - f(x)|^p \leq [|f_m(x)| + |f(x)|]^p \leq 2^p[|f_m(x)|^p + |f(x)|^p] \leq 2^{p+1} M_0(x)^p$$

onde $2^{p+1} M_0(x)^p$ é função integrável em R^n.

Pelo *teorema da convergência dominada de Lebesgue,* segue

$$\lim_{m\to\infty} \int_{R^n} |f_m(x) - f(x)|^p dx = \int_{R^n} \lim_{m\to\infty} |f_m(x) - f(x)|^p dx = 0 . \quad \blacksquare$$

---

[25]A função maximal foi introduzida, na reta real, por Hardy e Littlewood em 1930. A extensão para várias variáveis devem-se a N.Wiener em 1939, J.Marcinkiewicz e A.Zygmund em 1939, conforme Stein-Wainger [1]. Em Bennett-Sharpley [2] é salientada a importância da função maximal em Análise Harmônica e aplicação em outras áreas como probabilidade e teoria ergódica; sugerimos também Sadosky [1]. Outros tipos de funções maximais podem ser vistos, por exemplo, em Hudson [1], Stein-Wainger [1], Steins [1,2,6], Bagby [1] e Okikiolu [1]. Um comentário sobre a vida e a obra de John Edensor Littlewood pode ser encontrado em Batemann-Diamond [1].

[26]A **Proposição 1.22**, baseada em Sadosky [1] e Cotlar-Cignoli [1], merece dois comentários. Primeiro, para uma seqüência de funções simples vale o resultado da **Proposição 1.22** sem a necessidade da existência da função maximal M; conforme Okikiolu [1]. Segundo, a **Proposição 1.22** generalizado para uma seqüência de operadores lineares em relação a uma família de índices contínuos pode ser visto em Guzmán [5] e também em Sadosky [1]. É o *método das funções maximais*; e está relacionado com a teoria de convergência de operadores.

Para uma função f localmente integrável em R^n definimos:

i) a *função maximal esférica centrada*

$$M_1 f(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{|S(x,r)|} \int_{S(x,r)} |f|$$

onde $S(x,r)$ é qualquer esfera centrada em x de raio $r > 0$;

ii) a *função maximal cúbica centrada*

$$M_2 f(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{|Q(x,r)|} \int_{Q(x,r)} |f|$$

onde $Q(x,r)$ é qualquer cubo não degenerado centrado em x com lados de comprimento r e paralelos aos eixos cartesianos.

iii) a *função maximal de Hardy-Littlewood*

$$Mf(x) := \sup_{R^n \supset Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f| \tag{1.32}$$

onde o supremo é tomado sobre todos os cubos (de R^n) não degenerados contendo x com lados paralelos aos eixos cartesianos.

Na verdade, considerando a medida de Lebesgue, verificaremos que as funções maximais $M_1 f$, $M_2 f$ e Mf são equivalentes entre si.

Compararemos os volumes de $S(x,r)$ e $Q(x,2r)$ antes de verificar a equivalência entre $M_1 f$ e $M_2 f$.

Sejam $S(x,r)$ a esfera em R^n, de raio $r > 0$ e centro em x; $q(x,r_0)$ o cubo de lado r_0 (a ser determinado) e diagonal de comprimento $2r$ inscrito em $S(x,r)$; $Q(x,2r)$ o cubo com lado de comprimento $2r$ circunscrito em $S(x,r)$.

Em Stein-Weiss [1] afirma-se que se os cubos $q(x,r_0)$ e $Q(x,2r)$ possuem os lados paralelos aos eixos cartesianos, então existem constantes A_n e a_n dependendo somente da dimensão n tais que

$$|Q(x,2r)| = A_n |S(x,r)| \quad \text{e} \quad |S(x,r)| = a_n |q(x,r_0)|.$$

Vamos obter explicitamente as constantes A_n e a_n. É suficiente obter os volumes $|Q(x,2r)|$, $|q(x,r_0)|$ e $|S(x,r)|$.

O cubo $Q(x,2r)$ de lado $2r$ tem volume $|Q(x,2r)| = 2^n r^n$.

O cubo $q(x,r_0)$ de lado r_0 tem diagonal $2r$. Calcularemos r_0 em termos de r. Suponhamos que o cubo $q(x,r_0)$ tenha um vértice na origem $(0,0,\cdots,0)$. Neste caso uma diagonal de $q(x,r_0)$ une a origem ao vértice $(r_0,r_0,\cdots,r_0)$. Assim,

$$(2r)^2 = \{diam\ q(x,r_0)\}^2 = r_0^2 + r_0^2 + \cdots + r_0^2 = nr_0^2.$$

Logo, o volume de $q(x,r_0)$ é $|q(x,r_0)| = r_0^n = 2^n r^n / \sqrt{n^n}$.

Seja Γ a *função gama*[27]. Para $n > 1$ o volume da esfera unitária[28] Ω_n em R^n é dado por

$$|\Omega_n| = \pi^{n/2} / \Gamma(1 + n/2).$$

Portanto, $|S(x,r)| = |\Omega_n| r^n$.

[27]A função gama foi introduzida por L.Euler em 1729, mas publicada em 1755, e uma caracterização pode ser vista em Laugwitz-Rodewald [1].

[28]A dedução clássica para o volume da esfera unitária pode ser encontrada em Sadosky [1], Cotlar-Cignoli [1] ou Okikiolu [1]. Para uma prova alternativa indicamos Huber [1].

Concluindo,

$$A_n = \frac{|Q(x,2r)|}{|S(x,r)|} = \frac{2^n}{|\Omega_n|} \qquad e \qquad a_n = \frac{|S(x,r)|}{|q(x,r_0)|} = \frac{\sqrt{n^n}|\Omega_n|}{2^n}. \tag{1.33}$$

Pela equivalência entre esferas centradas e cubos centrados obtida em (**1.33**) segue a equivalência entre as funções maximais $M_1 f$ e $M_2 f$. Se uma função maximal é finita então a outra também é.

Mostraremos agora que Mf é equivalente a $M_2 f$.

De fato, por definição,

$$M_2 f(x) \leq Mf(x). \tag{1.34}$$

Por outro lado, fixemos um cubo qualquer Q contendo $x \in R^n$.

Portanto, $Q := Q(x_Q, r)$ onde x_Q é o centro do cubo Q e $r := |Q|^{1/n}$.

Assim, $Q(x_Q, r) \subset Q(x, 3r)$ e $|Q(x,3r)| = 3^n r^n = 3^n |Q|$ implicam

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f| = \frac{|Q(x,3r)|}{|Q|}\frac{1}{|Q(x,r)|}\int_{Q(x,3r)} |f| \leq 3^n M_2 f(x). \tag{1.35}$$

Em (**1.35**), tomando o supremo sobre todos os cubos contendo x segue

$$Mf(x) \leq 3^n M_2 f(x). \tag{1.36}$$

A equivalência entre Mf e $M_2 f$ resulta de (**1.34**) e (**1.36**) .

Poder-se-ia pensar que a condição do supremo em $Mf(x)$ atuar sobre cubos contendo x seja restritiva. No final deste capítulo apresentaremos um operador maximal onde o supremo será tomado sobre cubos, independentes de serem ou não centrados.

Para toda função $f \in L^1_{loc}(R^n)$, Mf é também função mensurável. De fato, para cada $r > 0$ e cada cubo Q contendo x, a integral $\int_Q |f|$ é contínua (como função de x); donde, o supremo (como função de x) tomado sobre $Q \ni x$ de $\frac{1}{|Q|}\int_Q |f|$ é semicontínua. Mas funções semicontínuas são mensuráveis. Logo, $Mf(x)$ é mensurável.

Outra maneira de ver a mensurabilidade de $Mf(x)$ é observando que $\{x \in R^n : Mf(x) > \lambda\}$ é um conjunto aberto para cada $\lambda > 0$.

Mesmo argumento funciona para mostrar que $M_1 f$ e $M_2 f$ são funções mensuráveis.

Apresentamos algums conceitos sobre operadores.

Seja c um escalar real fixo definido em um domínio $\mathcal{O} \subset R^n$. Dizemos que o operador T é *sublinear* se $T(f+g)$ e $T(cf)$ estão bem definidas sempre que Tf e Tg estejam definidas e satisfazem:

$$i) \quad |T(f+g)(x)| \leq |Tf(x)| + |Tg(x)| \quad \text{quase sempre;}$$

$$ii) \quad |T(cf)(x)| = |c||Tf(x)| \quad \text{quase sempre}\ .$$

Um operador T é *tipo (p,q)* onde $1 \leq p, q \leq \infty$, se leva $L^p(\mathcal{O}_1)$ limitadamente sobre $L^q(\mathcal{O}_2)$, isto é, se existe uma constante c dependendo de p e q mas independente de f tal que

$$\|Tf\|_{L^q(\mathcal{O}_2)} \leq c\|f\|_{L^p(\mathcal{O}_1)} \quad \text{para toda função } f \in L^p(\mathcal{O}_1).$$

Um operador T é do *tipo fraco-(p,q)* se leva $L^p(\mathcal{O}_1)$ limitadamente sobre $L^q(\mathcal{O}_2)$-fraco, isto é, se existe uma constante c independente de f tal que

$$|\{y \in \mathcal{O}_2 : |(Tf)(y)| > \lambda\}| \leq \left(c\frac{\|f\|_{L^p(\mathcal{O}_1)}}{\lambda}\right)^q$$

para toda função $f \in L^p(\mathcal{O}_1)$ e todo $\lambda > 0$; onde $1 \leq p \leq \infty$ e $1 \leq q < \infty$. Notemos que q é finito. No caso $q = \infty$ temos: *tipo fraco-(p,∞)* é definido como sendo igual a *tipo (p, ∞)*, onde $1 \leq p \leq \infty$.

Tipo (p,q) implica *tipo fraco-(p,q)*.

De fato, sejam $f \in L^p(\mathcal{O}_1)$ e T *tipo (p,q)*. Para facilitar, denotaremos o conjunto $\{y \in \mathcal{O}_2 : |(Tf)(y)| > \lambda\}$ por E. Então,

$$|E| = \int_{\mathcal{O}_2} \chi_E dy \leq \int_{\mathcal{O}_2} \left(\frac{|(Tf)(y)|}{\lambda}\right)^q dy \leq \frac{1}{\lambda^q}\|Tf\|^q_{L^q(\mathcal{O}_2)} \leq \left(\frac{c}{\lambda}\|f\|_{L^p(\mathcal{O}_1)}\right)^q.$$

Isto é o suficiente para prosseguirmos.

Naturalmente, o *operador maximal de Hardy-Littlewood* será

$$M : f \in L^1_{loc}(R^n) \mapsto Mf \in \mathcal{M}(R^n)$$

onde $\mathcal{M}(R^n)$ denota o espaço de todas as funções mensuráveis definidas em R^n.

De maneira análoga, definem-se os operadores M_1 e M_2.

M é um operador sublinear, isto é, satisfaz $M(f+g) \leq Mf + Mg$ e $M(cf) = |c|Mf$ para toda f e g em $L^1_{loc}(R^n)$ e constante escalar c.[29]

Podemos restringir M_1, M_2 e M para subespaços de $L^1_{loc}(R^n)$; por exemplo $L^p(R^n)$ onde $1 \leq p \leq \infty$.

Veremos a finitude de Mf exceto em conjunto de medida nula. Este fato é uma conseqüência do

Teorema 1.23 . *Seja* $f \in L^1(R^n)$.

$$i)\quad (Mf)_*(\lambda) \leq \tfrac{4^n}{\lambda}\|f\|_{L^1(R^n)} \quad \textit{para todo } \lambda > 0$$

$$ii)\quad (Mf)^*(s) \leq \tfrac{4^n}{s}\|f\|_{L^1(R^n)} \quad \textit{para todo } s > 0\,.$$

Demonstração.[30] Bennett-Sharpley [2] . ■

Vejamos a finitude quase sempre de Mf para $f \in L^1(R^n)$.[31] Utilizaremos a sugestão de Stein-Weiss [2].

Para $\lambda > 0$, definimos o conjunto $E_{Mf}(\lambda) := \{x \in R^n : Mf(x) > \lambda\}$.

Se Mf fosse infinito em um conjunto A de medida positiva $|A| > 0$ teríamos $A \subseteq E_{Mf}(\lambda)$ para todo $\lambda > 0$. Então $(Mf)_*(\lambda) \geq |A| > 0$ para todo $\lambda > 0$. Isto contradiz com $(Mf)_*(\lambda)$ tender a zero quando λ cresce indefinidamente; conforme item $i)$ do **Teorema 1.23**. Conclui-se que $Mf(x)$ é finita em quase todo ponto quando $f \in L^1(R^n)$.

Por (**1.32**), para toda função $f \in L^\infty(R^n)$ vale

$$|Mf(x)| \leq \|f\|_{L^\infty(R^n)} < \infty\,. \tag{1.37}$$

O próximo resultado é verificar que Mf também será finito quase sempre para $f \in L^p(R^n)$ além de $p = 1$ e $p = \infty$.

Proposição 1.24 . *Mf é finito quase sempre para f em $L^p(R^n)$ e $1 \leq p \leq \infty$.*

Demonstração. Os casos $p = 1$ e ∞ foram mostrados nos parágrafos anteriores.

---

[29]Uma propriedade do operador M é majorar certos operadores importantes na Teoria de Aproximação e Análise Harmônica; conforme Kahane [1]. Por exemplo, o *operador integral de Poisson* segundo Sadosky [1] e Stein-Weiss [1].

[30]Em Kahane [1] encontra-se outra demonstração deste Teorema utilizando *cubos triádicos* e baseado numa prova De La Vallé Poussin.

[31]Uma prova alternativa deste fato pode ser encontrado em Sadosky [1].

Dada uma função f em $L^p(R^n)$ com $1 < p < \infty$ definimos duas outras funções

$$f_1(x) := \begin{cases} f(x) & \text{se } |f(x)| < 1 \\ 0 & \text{se } |f(x)| \geq 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad f^1(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } |f(x)| < 1 \\ f(x) & \text{se } |f(x)| \geq 1 . \end{cases}$$

Logo, $|f_1(x)| < 1$ e $|f^1(x)| \leq |f(x)|^p$ para todo $x \in R^n$.
Podemos escrever $f = f_1 + f^1$ com $f_1 \in L^\infty(R^n)$ e $f^1 \in L^1(R^n)$.
A subaditividade do operador M produz

$$Mf(x) = M(f_1 + f^1)(x) \leq Mf_1(x) + Mf^1(x) .$$

Sejam A, A_1 e A^1 os conjuntos dos pontos onde f, f_1 e f^1, respectivamente, são infinitos. Pelos casos $p = 1$ e $p = \infty$ tem-se $|A_1| = |A^1| = 0$. Portanto, $A = A_1 \bigcup A^1$ e $|A| \leq |A_1| + |A^1| = 0$. Assim, Mf é finito quase sempre. ■

O principal resultado deste capítulo é o

Teorema 1.25 . (Teorema Maximal de Hardy e Littlewood)[32] *Fixado $1 < p \leq \infty$, seja f um elemento de $L^p(R^n)$. Então, Mf também será um elemento de $L^p(R^n)$ e existe uma constante c dependendo unicamente de p e da dimensão n tal que*

$$||Mf||_{L^p(R^n)} \leq c||f||_{L^p(R^n)} .$$

No caso $1 < p < \infty$, $c := 2^{1+2n}(\frac{p}{p-1})$ e se $p = \infty$, $c := 1$.

A versão do **Teorema 1.25** para $M_1 f$ fornece $c := 2\left(\frac{5^n p}{p-1}\right)^{1/p}$ se $1 < p < \infty$ e $c := 1$ se $p = \infty$, conforme Stein [2] ou $c := 2\left(\frac{2^n p}{p-1}\right)^{1/p}$ se $1 < p < \infty$ e $c := 1$ se $p = \infty$, conforme Stein-Weiss [1]. Sugerimos também Guzmán [1].

Stein [4] explica que a razão dessas constantes depender da dimensão n provém do fato de utilizar resultados tipo *cobertura de Vitali* e ele observa que essas constantes (como função de n) aumentam quando $n \to \infty$. Comentaremos, no próximo parágrafo, sobre a existência de uma constante c para o **Teorema 1.25** (onde c independe de n mas depende de p). Sugerimos também Stein [5] e Stein-Strömberg [1].

A versão do **Teorema 1.25** para a *função maximal esférica centrada na origem*

$$M_4 f(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{|S(0,r)|} \int_{S(0,r)} |f(x-y)| dy$$

apresenta uma constante que pode depender unicamente do parâmetro p, isto é, sem depender da dimensão n. Este fato está provado de três diferentes maneiras em Stein [4], Stein-Strömberg [1] e Stein [4]. Resultados análogos para outros operadores é discutido em Stein [6].

Apresentaremos no final desta subseção uma prova alternativa do **Teorema 1.25**.

O caso $p = \infty$ do **Teorema 1.25** segue de (**1.37**); a constante vale $c := 1$.

Melhoraremos a estimativa do **Teorema 1.23**. Fixemos um número real $\lambda > 0$ e f em $L^1_{loc}(R^n)$.

Definimos a partição de f em relação a λ por $f(x) = f_{\lambda/2}(x) + f^{\lambda/2}(x)$, onde

$$f_{\lambda/2}(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } |f(x)| > \lambda/2 \\ f(x) & \text{se } |f(x)| \leq \lambda/2 \end{cases} \quad \text{e} \quad f^{\lambda/2}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{se } |f(x)| > \lambda/2 \\ 0 & \text{se } |f(x)| \leq \lambda/2 . \end{cases}$$

[32] Este teorema foi originalmente provado por G. H. Hardy e J. E. Littlewood em 1930 e sua generalização para espaços vetoriais deve-se a C. Fefferman e E. M. Stein em 1963; conforme Francia [1] . Francia [1] apresenta outros resultados sobre operadores maximais em espaços vetoriais. Phillips [1] fornece referências para aplicações deste teorema. Sugerimos também Guzmán [2].

A sublinearidade de M produz $Mf(x) \leq Mf_{\lambda/2}(x) + Mf^{\lambda/2}(x)$.
Donde, pela **Proposição 1.10**, $(Mf)_*(\lambda) \leq (Mf_{\lambda/2})_*(\lambda/2) + (Mf^{\lambda/2})_*(\lambda/2)$.
Mas $(Mf_{\lambda/2})_*(\lambda/2) = 0$. Portanto, pela **Proposição 1.23**,

$$(Mf)_*(\lambda) \leq (Mf^{\lambda/2})_*(\lambda/2) \leq \frac{4^n}{\lambda/2}\int_{R^n}|f^{\lambda/2}| = \frac{2^{1+2n}}{\lambda}\int_{|f|>\lambda/2}|f|, \tag{1.38}$$

onde $|f| > \lambda/2$ significa o conjunto dos x de R^n tal que $|f(x)| > \lambda/2$.
Em (**1.38**) obtivemos uma cota superior para $(Mf)_*$.
Existe uma cota inferior para $(Mf)_*$. É o seguinte resultado devido a E. M. Stein em 1969 e C. Herz em 1968; conforme Guzmán [1].

Teorema 1.26 . *Para cada $f \in L^1(R^n)$ e cada $\lambda > 0$ vale*

$$\frac{c_0}{\lambda}\int_{|f|>\lambda}|f| \leq (Mf)_*(\lambda) \leq \frac{2^{1+2n}}{\lambda}\int_{|f|>\lambda/2}|f|$$

onde a constante c_0 depende exclusivamente da dimensão n.

Demonstração . A prova da primeira desigualdade encontra-se em Guzmán [1]. A segunda desigualdade é (**1.38**). ■

O **Teorema 1.25** diz que M é operador *tipo* (p,p) para $1 < p \leq \infty$.[33]
O **Teorema 1.23** diz que M é operador *tipo fraco (1,1)*[34] e possui a seguinte aplicação

Teorema 1.27 . *Seja $f \in L^1_{loc}(R^n)$. Para quase todo x em R^n vale*

$$\lim_{Q\downarrow\{x\}}\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(y)-f(x)|dy = 0.$$

Os pontos $x \in R^n$ satisfazendo o **Teorema 1.27** formam o *conjunto de Lebesgue.*

Demonstração do Teorema 1.27. Bennett-Sharpley [2] . ■

Conseqüentemente, para $f \in L^1_{loc}(R^n)$, valem os dois itens abaixo:
i) Aplicando o **Teorema 1.27** na desigualdade

$$\left|f(x) - \frac{1}{|Q|}\int_Q f(y)dy\right| \leq \frac{1}{|Q|}\int_Q|f(y)-f(x)|dy$$

segue o **Teorema 1.21** de *diferenciação de Lebesgue.*[35]
ii) Para todo cubo Q contendo x ocorre

$$\left|\frac{1}{|Q|}\int_Q f(y)dy\right| \leq \frac{1}{|Q|}\int_Q|f(y)|dy \leq Mf(x).$$

---

[33] O operador M não é tipo $(1,1)$. O exemplo clássico na reta real é a função característica no intervalo unitário $[0,1]$, $f := \chi_{[0,1]}$ pois $Mf(x) \geq \frac{1}{2x}$ se $x \geq 1$ e $\int_1^\infty |f| = \infty$. Existem outros operadores que não são *tipo (1,1)*; exemplos desses operadores podem ser vistos em Hudson [1] e exemplos algumas integrais singulares em Sadosky [1].

[34] O *teorema de Lebesgue* pode ser provado utilizando o fato de M_1 ser *tipo fraco (1,1)*; conforme Guzmán [1]. Em 1961, Stein obteve a recíproca: o *Teorema de Lebesgue* implica que M_1 é *tipo fraco (1,1)*; conforme Stein-Wainger [1].

[35] Por esse motivo, alguns autores, por exemplo Bennett-Sharpley [2], considera o **Teorema 1.27** como sendo o *teorema de diferenciação de Lebesgue.*

Fazendo Q tender a x na desigualdade acima e pelo **Teorema 1.21**, segue

$$|f(x)| \leq Mf(x) \quad \text{para quase todo } x \text{ em } R^n . \tag{1.39}$$

Para $1 \leq p \leq \infty$ tem-se $f \in L^p(R^n) \subseteq L^1_{loc}(R^n)$. Este fato e (**1.39**) implicam

$$\|f\|_{L^p(R^n)} \leq \|Mf\|_{L^p(R^n)} .$$

Esta é a desigualdade reversa do **Teorema 1.25** para $1 < p \leq \infty$.

Para a demonstração do **Teorema 1.25** necessitaremos de dois resultados e algumas definições.

Cubos diádicos são construídos da seguinte forma: considere todos os pontos de R^n com coordenadas inteiras; esses pontos definem um conjunto enumerável de cubos com lados unitários, denotado por M_0. Dividimos os lados dos cubos de M_0 por dois; esse novo conjunto enumerável de cubos de lado 2^{-1} é denotado por $M_1 := 2^{-1}M_0$. Continuando as subdivisões sempre pela metade da anterior obtemos o conjunto $M_{k+1} := 2^{-1}M_k$. Assim, $M_k = 2^{-k}M_0$ para todo $k \in N$. A extensão óbvia é $M_k = 2^{-k}M_0$ onde k percorre Z. Os cubos diádicos é a coleção $\{M_k : k \in Z\}$.

Entende-se por cubos disjuntos aqueles com interiores disjuntos.

A propriedade interessante dos cubos diádicos é que dois cubos diádicos, ou possuem interiores disjuntos, ou um contém o outro.

Lema 1.28 . (Lema de tipo Vitali para cubos diádicos) *Seja E um subconjunto de R^n com medida finita. Então existe uma seqüência de cubos diádicos $\{Q_j : j \in N\}$ cobrindo E com interiores disjuntos dois a dois, satisfazendo*

$$i) \quad Q_j \bigcap E^c \neq \emptyset \text{ para todo } j \in N ; \qquad e \qquad ii) \quad |E| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \leq 2^n |E| .$$

Demonstração. Bennett-Sharpley [1] ou [2]. ■

O próximo resultado é mostrar a equivalência entre $(Mf)^*$ e f^{**}.

Simultaneamente como uma aplicação do **Lema 1.28** tem-se uma decomposição de uma função $f \in L^1_{loc}(R^n)$ de modo que $f = g + h$ onde $g \in L^1(R^n)$ e $h \in L^\infty(R^n)$.

De fato, seja $(Mf)^*(s) < \infty$ para algum $s > 0$. Definimos o conjunto

$$E_s := E := \{x \in R^n : Mf(x) > (Mf)^*(s)\} .$$

O conjunto E é aberto e pela **Proposição 1.13** temos $|E| \leq s$. Estas são as condições do **Lema 1.28**. Portanto, existe uma família de cubos diádicos $\{Q_j : j \in N\}$ tais que

$$E \subseteq \bigcup_j Q_j , \quad Q_j \bigcap E^c \neq \emptyset \quad \text{para cada } j , \quad |E| \leq \sum_j |Q_j| \leq 2^n |E| .$$

Escrevemos f como soma das funções $g := \sum_j f\chi_{Q_j}$ e

$$h := f - g = f - \sum_j f\chi_{Q_j} = f - f\chi_{(\bigcup_j Q_j)} = f\chi_F \quad \text{onde } F := \left(\textstyle\bigcup_j Q_j\right)^c .$$

Estimaremos as normas de g e h em $L^1(R^n)$ e $h \in L^\infty(R^n)$, respectivamente.

Como $Q_j \cap E^c \neq \emptyset$ para cada j; tomemos um elemento dessa interseção não vazia; digamos, x_{0j}. Portanto, $x_{0j} \notin E$ e (**1.32**) implicam

$$\frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} |f| \leq Mf(x_{0j}) \leq (Mf)^*(s) .$$

Logo,

$$\|g\|_{L^1(R^n)} \le \sum_j \int_{Q_j} |f| \le (Mf)^*(s) \sum_j |Q_j| \le 2^n |E| (Mf)^*(s) \le 2^n s (Mf)^*(s) < \infty \,. \tag{1.40}$$

Para quase todo $x \in F \subseteq E^c$, por (**1.40**), tem-se

$$|h(x)| \le Mh(x) = M(f\chi_F)(x) \le (Mf)^*(s)\,.$$

Se $x \notin F$ então $h(x) = 0$ por definição de h. Donde,

$$\|h\|_{L^\infty(R^n)} \le (Mf)^*(s) < \infty \,. \tag{1.41}$$

Assim, $g \in L^1(R^n)$ e $h \in L^\infty(R^n)$.

Pela subaditividade do operador $** : f \mapsto f^{**}$ dado em (**1.26**), **Proposição 1.16** item $iii)$, **Proposição 1.17** item $i)$, (**1.40**) e (**1.41**) seguem

$$f^{**}(s) \le g^{**}(s) + h^{**}(s) \le \frac{1}{s}\|g\|_{L^1(R^n)} + \|h\|_{L^\infty(R^n)} \le (2^n + 1)(Mf)^*(s) < \infty \,. \tag{1.42}$$

Por outro lado, seja $f^{**}(s) < \infty$ para algum $s > 0$.

A **Proposição 1.17** item $i)$ implica $f^*(s) < \infty$.

Definimos o conjunto

$$\tilde{E}_s := \tilde{E} := \{x \in R^n : |f(x)| > f^*(s)\}\,.$$

Novamente temos $|\tilde{E}| \le s$, pela **Proposição 1.13**.

Afirmamos a validade da decomposição $f = \tilde{g} + \tilde{h}$ para

$$\begin{cases} \tilde{g}(x) := [\ \textit{sinal de } f(x)].\max\{|f(x)| - f^*(s), 0\} \\ \\ \tilde{h}(x) := [\ \textit{sinal de } \ f(x)].\min\{|f(x)|, f^*(s)\}\,. \end{cases}$$

onde

$$\textit{sinal de } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } f(x) > 0 \\ 0 & \text{se } f(x) = 0 \\ -1 & \text{se } f(x) < 0\,. \end{cases}$$

De fato, primeiramente seja *sinal de* $f(x) = 1$. Se $\tilde{g}(x) = f(x) - f^*(s) > 0$ então $\tilde{h}(x) = f^*(s)$. Se $\tilde{g}(x) = 0$ então $\tilde{h}(x) = f(x)$. O caso *sinal de* $f(x) = -1$ é tratado análogamente observando que $-|f(x)| = -[\ \textit{sinal de } f(x)].f(x) = f(x)$.

Estimaremos as normas de $\tilde{g}$ e $\tilde{f}$ em $L^1(R^n)$ e $L^1(R^n)$, respectivamente.

Se $x \notin \tilde{E}$ então $\tilde{g}(x)$ vale zero. Logo, pela segunda caracterização de f^{**} dada em (**1.25**), seguem

$$\begin{aligned} \|\tilde{g}\|_{L^1(R^n)} &= \int_{\tilde{E}^c} |\tilde{g}| + \int_{\tilde{E}} |\tilde{g}| = \int_{\tilde{E}} [|f| - f^*(s)] = \int_{\tilde{E}} |f| - |\tilde{E}| f^*(s) \\ &= |\tilde{E}| \left[\frac{1}{|\tilde{E}|}\int_{\tilde{E}} |f| - f^*(s)\right] \le s\left[\frac{1}{|\tilde{E}|}\int_{\tilde{E}} |f| - f^*(s)\right] \le s[f^{**}(s) - f^*(s)] < \infty\,. \end{aligned} \tag{1.43}$$

Alternativamente, podemos escrever

$$|\tilde{h}(x)| = \min\{|f(x)|, f^*(s)\} = \begin{cases} f^*(s) & \text{se } \ x \in \tilde{E} \\ |f(x)| & \text{se } \ x \notin \tilde{E}\,. \end{cases}$$

Logo, para todo $x \in R^n$ tem-se $|\tilde{h}(x)| \leq f^*(s)$. Donde,

$$\|\tilde{h}\|_{L^\infty(R^n)} \leq f^*(s) < \infty. \tag{1.44}$$

Portanto, $\tilde{g} \in L^1(R^n)$ e $\tilde{h} \in L^\infty(R^n)$.

Pela propriedade de sublinearidade do operador M temos $Mf = M(\tilde{g} + \tilde{h}) \leq M\tilde{g} + M\tilde{h}$.

Decorrem da **Proposição 1.15**, **Teorema 1.23**, **Proposição 1.17** itens $i)$ e $ii)$, **Proposição 1.16** item $i)$, **Teorema 1.25** com $p = \infty$, (**1.43**), (**1.44**) o seguinte:

$$\begin{aligned}(Mf)^*(s) &\leq (M\tilde{g})^*\left(\frac{s}{2}\right) + (M\tilde{h})^*\left(\frac{s}{2}\right) \leq \frac{4^n}{s/2}\|\tilde{g}\|_{L^1(R^n)} + \|M\tilde{h}\|_{L^\infty(R^n)} \\ &\leq \frac{4^n}{s/2}\|\tilde{g}\|_{L^1(R^n)} + \|\tilde{h}\|_{L^\infty(R^n)} \leq 2^{1+2n}[f^{**}(s) - f^*(s)] + f^{**}(s) \\ &= 2^{1+2n}f^{**}(s) - (2^{1+2n} - 1)f^*(s) \leq 2^{1+2n}f^{**}(s).\end{aligned} \tag{1.45}$$

(**1.25**) diz que f^{**} é uma função maximal. Que relação têm as funções maximais Mf e f^{**} ? A resposta é que elas são equivalentes, conforme o

Teorema 1.29 . (Hardy-Littlewood-1930 e Herz-1968) *Seja f é uma função localmente integrável em R^n . Para todo $s > 0$ vale*

$$\frac{1}{2^{1+2n}}(Mf)^*(s) \leq f^{**}(s) \leq (2^n + 1)(Mf)^*(s).$$

Demonstração. Se $f^{**}(s)$ ou $(Mf)^*(s)$ for infinito não há nada para demonstrar. Caso contrário, o teorema segue por (**1.42**) e (**1.45**). Esta prova foi baseada em Bennett-Sharpley [1] e [2]. As decomposições de R^n utilizando os conjuntos E_s e $\tilde{E}_s$ é devido a A. P. Calderón [2]. ■

Interessa-nos do **Teorema 1.29** a seguinte desigualdade

$$(Mf)^*(t) \leq 2^{1+2n}f^{**}(t) = 2^{1+2n}\frac{1}{t}\int_0^t f^*(\xi)d\xi \tag{1.46}$$

para a

Demonstração do Teorema 1.25 . (Bennett-Sharpley [1]) Pelo **Teorema 1.14**, (**1.46**) e a *desigualdade tipo Hardy* (**Teorema 1.3** item $i)$ com $r = 0$), seguem

$$\begin{aligned}\|Mf\|_{L^p(R^n)} &= \left(\int_0^\infty (Mf)^*(t)^p dt\right)^{1/p} \leq 2^{1+2n}\left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds\right)^p dt\right)^{1/p} \\ &\leq 2^{1+2n}\left(\frac{p}{p-1}\right)\left(\int_0^\infty f^*(t)^p dt\right)^{1/p} = 2^{1+2n}\left(\frac{p}{p-1}\right)\|f\|_{L^p(R^n)}.\end{aligned}$$

O caso $p = \infty$ segue de (**1.37**). ■

1.6.3 Aplicação

1.6.3.1 Espaço de Zygmund e Operador Maximal

A generalização do operador maximal de Hardy-Littlewood segue por dois modos.

Uma maneira é estudar diversos conjuntos onde o supremo em (**1.32**) possam ser tomados. Estes problemas foram abordados por E. M. Stein em 1976, E. M. Stein e S. Wainger em 1978, J. O.Strömberg em 1977, R. Fefferman e A. Cordoba em 1977 e A. Nagel, E. M. Stein e S. Wainger em 1977; conforme Stein [4].

Aproveitando o conceito de bases de diferenciação, Guzmán [1] define operadores maximais associados a tais bases. Argumentos baseados em propriedades do tipo cobertura de Besicovitch são também utilizados. Esses novos operadores conduzem a dois resultados. O primeiro é a introdução, em 1956, do método da rotação. O segundo é a caracterização, em 1971, por Guzmán e Welland, dos espaços de Zygmund no

Teorema 1.30 . *Sejam $f \in L^1(R^n)$ e M o operador maximal Hardy-Littlewood.*

$$\text{São equivalentes: } i) \int_{Mf>1} Mf < \infty \qquad e \qquad ii) \ f \in L(1 + log^+ L)$$

onde $Mf > 1$ significa o conjunto dos $x \in R^n$ tal que $Mf(x) > 1$.

Demonstração. (Guzmán [1]) A primeira igualdade em (**1.47**) abaixo, segue do **Teorema 1.11** com $p = 1$. Para facilitar a notação, seja $A := \{x \in R^n : Mf(x) > 1\}$.

$$\int_A Mf = \int_0^\infty |\{x \in A : Mf(x) > \lambda\}| \, d\lambda = \int_1^\infty |\{x \in R^n : Mf(x) > \lambda\}| \, d\lambda . \tag{1.47}$$

A segunda igualdade em (**1.47**) é devido a

$$\{x \in R^n : Mf(x) > \lambda\} \bigcap A = \{x \in R^n : Mf(x) > \lambda\} \qquad \text{para } \lambda > 1 .$$

Se vale $i)$, continuaremos a estimar (**1.47**) utilizando a primeira desigualdade do **Teorema 1.26** com constante c_0 e o fato de que $\{Mf > \lambda\} \supseteq \{|f| > \lambda\}$ pois $Mf \geq |f|$ quase sempre, para obter

$$\begin{aligned} \infty \ > \ (\mathbf{1.47}) &\geq c_0 \int_1^\infty \frac{1}{\lambda} \int_{Mf>\lambda} |f| \, dx \, d\lambda \geq c_0 \int_1^\infty \frac{1}{\lambda} \int_{|f|>\lambda} |f| \, dx \, d\lambda \\ &= c_0 \int_{|f|>1} |f| \int_1^{|f|} \frac{1}{\lambda} \, d\lambda \, dx = c_0 \int_{|f|>1} |f| \log |f| \, dx = c_0 \int_{R^n} |f| \log^+ |f| \, dx . \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{R^n} |f|(1 + \log^+ |f|) dx = \|f\|_{L^1(R^n)} + \int_{R^n} |f| \log^+ |f| dx < \infty$$

e vale $ii)$.

Para a outra implicação, seja $ii)$ válido. Estimaremos (**1.47**) utilizando a segunda desigualdade do **Teorema 1.26**.

$$\begin{aligned} (\mathbf{1.47}) &\leq 2^{1+2n} \int_1^\infty \frac{1}{\lambda} \int_{|f|>\lambda/2} |f| \, dx \, d\lambda = 2^{1+2n} \int_{2|f|>1} |f| \int_1^{2|f|} \frac{1}{\lambda} \, d\lambda \, dx \\ &= 2^{1+2n} \int_{2|f|>1} |f| \log 2|f| \, dx = 2^{1+2n} \int_{R^n} |f| \log^+ 2|f| \, dx \\ &= 2^{1+2n} \log 2 \|f\|_{L^1(R^n)} + 2^{1+2n} \int_{R^n} |f| \log^+ |f| \, dx < \infty . \end{aligned}$$

Isto prova $i)$. ■

O segundo modo de generalizar o operador maximal de Hardy-Littlewood é substituir a função $|f|$ do integrando em (**1.32**) mantendo fixado o conjunto onde o supremo é tomado. Esse é o procedimento seguido no próximo capítulo.

Capítulo 2

Teoria Maximal em $L^1_{loc}(\Omega)$

Neste capítulo apresentaremos as funções maximais $f^\sharp_\alpha$ e $f^\flat_\alpha$; estas serão as generalizações da função maximal de Hardy-Littlewood (apresentada no capítulo anterior) através de projeções do espaço de funções localmente integráveis no espaço de polinômios de grau $\leq k$; onde $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, Ω é um cubo de R^n ou todo R^n, $k \in N$ e $\alpha \geq 0$.

No resultado principal deste capítulo, $f^\sharp_\alpha$ e $f^\flat_\alpha$ medem regularidades locais e definem os espaços de Banach $C^\alpha_p(\Omega)$ e $\mathcal{C}^\alpha_p(\Omega)$, respectivamente, para $1 \leq p \leq \infty$.

Vale a inclusão $C^\alpha_p(\Omega) \subseteq \mathcal{C}^\alpha_p(\Omega)$ e a igualdade $C^\alpha_p(\Omega) = \mathcal{C}^\alpha_p(\Omega)$ ocorrerá quando α for não inteiro.

As funções $f^\sharp_\alpha$ e $f^\flat_\alpha$ são casos particulares de outra função maximal f_j, onde $j \in N$.

Mostraremos a equivalência entre $f^\sharp_\alpha$ e f_j quando $\Omega = R^n$ e $j > [\alpha]$.

Para α inteiro, $f^\flat_\alpha$ e f_j não são equivalentes, quando $\Omega = R^n$ e $j > (\alpha)$.

Obteremos resultados tipo diferenciação de Lebesgue quando Ω é um cubo.

Este capítulo e os seguintes apresentam resultados de DeVore-Sharpley [1].

Iniciamos com algumas propriedades de projeções.

2.1 Projeções

Dado um cubo qualquer Q de R^n, a finalidade desta seção é definir o operador projeção $P_Q : L^1(Q) \to P_k$ atuando em $L^1(Q)$ com valores no espaço de polinômios de grau $\leq k$ (denotada por P_k) e obter a seguinte

Proposição 2.1 . *Sejam Q um cubo de R^n e $f \in L^1(Q)$. Então:*

i) existe uma constante c, dependendo somente do grau k e da dimensão n, tal que

$$\|P_Q f\|_{L^\infty(Q)} \leq c \frac{1}{|Q|} \int_Q |f|$$

ii) se π é um polinômio de grau $\leq k$ então a constante c do item anterior satisfaz

$$|f(x) - P_Q f(x)| \leq (1+c) \int_Q |f - \pi| \quad \textit{para todo } x \in Q\,.$$

A proposição acima será demonstrada durante o decorrer de alguns resultados formalizados nesta seção. O objetivo do desenvolvimento abaixo é obter justamente a constante c (dependendo somente de k e n) da **Proposição 2.1**.

Seja $Q_0 := [0,1]^n$ o cubo unitário de R^n. O *produto interno* em $L^1(Q_0)$ é definido por

$$(f,g)_{Q_0} := \int_{Q_0} f(x)g(x)\,dx \quad \text{para todo } f,g \in L^1(Q_0)\,. \tag{2.1}$$

Uma base para o espaço P_k é dada por monômios multi-indexados $\{x^\nu\,, |\nu| \leq k\}$. Esta base, pelo processo de ortogonalização de Gram-Schmidt[36] em relação ao produto interno definido por (**2.1**), resulta noutra base ortonormal[37]

$$\left\{ \phi_\nu(x) := \sum_{|\mu|\leq k} c_{\nu,\mu} x^\mu \quad \text{onde } |\nu| \leq k\,, x \in Q_0 \text{ e } c_{\nu,\mu} \in R \right\}. \tag{2.2}$$

Para $f \in L^1(Q_0)$, definimos o *operador projeção de grau k de $f \in L^1(Q_0)$ em P_k* dado por

$$(P_k)_{Q_0} f := P_{Q_0} f := \sum_{|\nu|\leq k} (f,\phi_\nu)_{Q_0} \phi_\nu\,. \tag{2.3}$$

Para um cubo qualquer $Q := [a, a+l]^n$ em R^n de lado $l := |Q|^{1/n}$ onde a é um vértice de Q, consideramos a mudança de coordenadas $\varphi(x) := \frac{(x-a)}{l}$ de Q em Q_0 e $\varphi^{-1}(x) := lx + a$ de Q_0 em Q. Assim, para todo $f,g \in L^1(Q_0)$,

$$(f,g)_Q := (f\circ\varphi^{-1}, g\circ\varphi^{-1})_{Q_0} = \int_{Q_0} f\circ\varphi^{-1}.g\circ\varphi^{-1}(x)\,dx = \frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)g(x)\,dx\,. \tag{2.4}$$

Afirmamos que $\{\Phi_\nu := \phi_\nu \circ \varphi\,, |\nu| \leq k\}$ é uma base ortonormal em P_k.

De fato, por (**2.4**) e (**2.1**), para todo $|\nu| \leq k$ e $|\mu| \leq k$, segue

$$\begin{aligned}(\Phi_\nu\,, \Phi_\mu)_Q &= (\phi_\nu\circ\varphi\,, \phi_\mu\circ\varphi)_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q \phi_\nu\circ\varphi(x)\,.\phi_\mu\circ\varphi(x)dx \\ &= \int_{Q_0} \phi_\nu(x)\,.\phi_\mu(x)dx = (\phi_\nu\,, \phi_\mu)_{Q_0}\,.\end{aligned}$$

Donde segue a afirmação.

Estimaremos uma cota superior, dependendo somente da dimensão n e do grau k, para $|\Phi_\nu|$ utilizando a desigualdade $|x-a| \leq$ diâmetro do cubo $Q = n^{1/2}|Q|^{1/n}$ para todo $x \in Q$.

Seja $x \in Q$. Em (**2.2**) aplicamos φ utilizada em (**2.4**) para reescrever

$$\Phi_\nu(x) = \phi_\nu\circ\varphi(x) = \sum_{|\mu|\leq k} c_{\nu,\mu}\left(\frac{x-a}{l}\right)^\mu\,. \tag{2.5}$$

Por (**2.5**) e para todo $x \in Q$,

$$|\Phi_\nu(x)| \leq \sum_{|\mu|\leq k} |c_{\nu,\mu}| \left|\frac{x-a}{l}\right|^{|\mu|} \leq n^{k/2} c_\nu \tag{2.6}$$

[36] Este processo é descrito, por exemplo, em Kolmogorov-Fomin [1] e Wheeden-Zygmund [1]; outra maneira pode ser visto em Pursell-Trimble [1].

[37] As funções $\phi_\nu(x)$, dadas por (**2.2**), são os polinômios de Legendre, conforme Kolmogorov-Fomin [1].

com $|\nu| \leq k$; onde $c_\nu := \sum_{|\mu|\leq k} |c_{\nu,\mu}|$ depende de k, ν e Q_0, pois $c_{\nu,\mu}$ são coeficientes de monômios em Q_0. Por sua vez, o cubo Q_0 depende da dimensão n.

Fazendo $\tilde{c} := \max_{|\nu|\leq k} c_\nu$ (a constante $\tilde{c}$ depende de k e Q_0), a relação (**2.6**) fica

$$|\Phi_\nu(x)| \leq n^{k/2}\tilde{c} \quad \text{para todo } |\nu| \leq k \text{ e todo } x \in Q. \tag{2.7}$$

De (**2.7**) segue

$$\|\Phi_\nu(x)\|_{L^\infty(Q)} \leq n^{k/2}\tilde{c} \quad \text{para todo } |\nu| \leq k. \tag{2.8}$$

Apresentamos a seguir a generalização de (**2.3**). Para $f \in L^1(Q)$, definimos o *operador projeção de grau k de $L^1(Q)$ em P_k* por

$$(P_k)_Q f := P_Q f := \sum_{|\nu|\leq k} (f, \Phi_\nu)_Q \Phi_\nu. \tag{2.9}$$

Em particular, quando $k = 0$ em (**2.9**), denotamos

$$f_Q := P_Q f = \frac{1}{|Q|}\int_Q f.$$

Seguem de (**2.9**), para as funções f e g de $L^1(Q)$ e o polinômio $\pi \in P_k$,

$$P_Q(f+g) = P_Q f + P_Q g \quad \text{e} \quad P_Q \pi = \pi. \tag{2.10}$$

Neste caso, basta escrever $\pi = \sum_{|\nu|\leq k} b_\nu \Phi_\nu$ e aplicar (**2.9**).

Seja x_0 em ponto qualquer de Q.

Reescreveremos (**2.5**). Para cada ν fixo com $|\nu| \leq k$,

$$\begin{aligned}
\Phi_\nu(x) = \phi_\nu \circ \varphi(x) &= \sum_{|\mu|\leq k} c_{\nu,\mu}\left(\frac{x-a}{l}\right)^\mu = \sum_{|\mu|\leq k} c_{\nu,\mu}\left(\frac{x - x_0 + x_0 - a}{l}\right)^\mu \\
&= \sum_{|\mu|\leq k} c_{\nu,\mu}\left[\sum_{|\eta|\leq k}\binom{\mu}{\eta}\left(\frac{x_0-a}{l}\right)^{\mu-\eta}\left(\frac{x-x_0}{l}\right)^\eta\right] \\
&= \sum_{|\eta|\leq k}\left[\sum_{|\mu|\leq k} c_{\nu,\mu}\binom{\mu}{\eta}\left(\frac{x_0-a}{l}\right)^{\mu-\eta}\right]\left(\frac{x-x_0}{l}\right)^\eta \\
&= \sum_{|\eta|\leq k} d_{\nu,\eta}\left(\frac{x-x_0}{l}\right)^\eta
\end{aligned} \tag{2.11}$$

onde

$$d_{\nu,\eta} := \sum_{|\mu|\leq k} c_{\nu,\mu}\binom{\mu}{\eta}\left(\frac{x_0-a}{l}\right)^{\mu-\eta} \quad \text{e} \quad \binom{\mu}{\eta} := \frac{\mu!}{(\mu-\eta)!\eta!} \tag{2.12}$$

com $d_{\nu,\eta}$ dependendo de k, ν, η, x_0, a, l e da dimensão n e $\mu! := \mu_1!\mu_2!\cdots\mu_n!$.

A substituição de (**2.11**) em (**2.9**) acarreta

$$
\begin{aligned}
P_Q f(x) &= \sum_{|\nu|\le k} (f,\Phi_\nu)_Q \left[\sum_{|\eta|\le k} d_{\nu,\eta} \Big(\frac{x-x_0}{l}\Big)^\eta \right] = \sum_{|\nu|\le k} \sum_{|\eta|\le k} d_{\nu,\eta} (f,\Phi_\nu)_Q \Big(\frac{x-x_0}{l}\Big)^\eta \\
&= \sum_{|\eta|\le k} \sum_{|\nu|\le k} d_{\nu,\eta} (f,\Phi_\nu)_Q \Big(\frac{x-x_0}{l}\Big)^\eta = \sum_{|\eta|\le k} \Big(f, \sum_{|\nu|\le k} d_{\nu,\eta}\Phi_\nu\Big)_Q \Big(\frac{x-x_0}{l}\Big)^\eta \qquad (2.13) \\
&= \sum_{|\eta|\le k} (f,h_\eta)_Q \Big(\frac{x-x_0}{l}\Big)^\eta
\end{aligned}
$$

onde

$$h_\eta := \sum_{|\nu|\le k} d_{\nu,\eta}\Phi_\nu \tag{2.14}$$

e h_η depende de k, ν, η, x_0, a, l e da dimensão n.

Estimaremos $\|h_\eta\|_{L^\infty(Q)}$ e $\|P_Q f\|_{L^\infty(Q)}$ para f em $L^1(Q)$.

(**2.8**), (**2.12**) e (**2.14**) implicam, para cada $|\eta| \le k$,

$$
\begin{aligned}
\|h_\eta\|_{L^\infty(Q)} &\le n^{k/2}\tilde{c} \sum_{|\nu|\le k} |d_{\nu,\eta}| \le n^{k/2}\tilde{c} \sum_{|\nu|\le k} \sum_{|\mu|\le k} |c_{\nu,\mu}| \binom{\mu}{\eta} \left|\frac{x_0-a}{l}\right|^{|\mu-\eta|} \\
&\le n^{k/2}\tilde{c} \sum_{|\mu|\le k} |c_{\nu,\mu}| \binom{\mu}{\eta} n^{|\mu-\eta|/2}.
\end{aligned} \tag{2.15}
$$

Fazendo $d_\eta := \sum_{|\nu|\le k} \sum_{|\mu|\le k} |c_{\nu,\mu}| \binom{\mu}{\eta} n^{|\mu-\eta|/2}$ (a constante d_η dependendo de $n, k,$ e η) e $\tilde{d} := \max_{|\eta|\le k} d_\eta$ (a constante $\tilde{d}$ dependendo de n e k) em (**2.15**) segue

$$\|h_\eta\|_{L^\infty(Q)} \le n^{k/2}\tilde{d}\tilde{c} \tag{2.16}$$

para todo $|\eta| \le k$ e a constante $n^{k/2}\tilde{d}\tilde{c}$ dependendo somente de k e da dimensão n.

(**2.9**), aplicando (**2.7**) duas vezes sucessivamente e (**2.4**) fornecem

$$
\begin{aligned}
|P_Q f| &\le \tilde{c}n^{k/2} \sum_{|\nu|\le k} |(f,\Phi_\nu)_Q| \le (\tilde{c}n^{k/2})^2 \sum_{|\nu|\le k} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f| \\
&= \tilde{c}^2 n^k \frac{1}{|Q|}\int_Q |f| \sum_{|\nu|\le k} 1 = c\frac{1}{|Q|}\int_Q |f|
\end{aligned} \tag{2.17}
$$

onde, usando (**1.16**), vale

$$c := \tilde{c}^2 n^k \sum_{|\nu|\le k} 1 = \tilde{c}^2 n^k \sum_{j=0}^{k} \frac{(n+j-1)!}{(n-1)!j!}. \tag{2.18}$$

Segue de (**2.17**),

$$\|P_Q f\|_{L^\infty(Q)} \le c\frac{1}{|Q|}\int_Q |f| \tag{2.19}$$

onde a constante c dada por (**2.18**) depende somente de n e k.

Demonstração da Proposição 2.1 O item $i)$ é (**2.19**). Mostraremos o item $ii)$. Seja $x \in Q$. O item $ii)$ segue utilizando o item $i)$ e (**2.10**) do seguinte modo:

$$\begin{aligned} |f(x)P_Q(x)| &\leq \|f - P_Q\|_{L^\infty(Q)} \\ &\leq \|f-\pi\|_{L^\infty(Q)} + \|P_Q(f-\pi)\|_{L^\infty(Q)} \\ &\leq (1+c)\frac{1}{|Q|}\int_Q |f-\pi|. \ \blacksquare \end{aligned}$$

A seguir o número natural k será obtido a partir de um número real $\alpha \geq 0$.

2.2 Função Maximal em $L^1_{loc}(\Omega)$

Para um número real $\alpha \geq 0$ definimos $[\alpha]$ o *maior inteiro menor ou igual a* α e (α) o *maior inteiro estritamente menor que* α. Por convenção: $(0) = 0$. O número $[\alpha]$ é a parte inteira de α.

O espaço $L^1_{loc}(\Omega)$ é constituído pelas funções $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que $|f|$ é integrável sobre qualquer subconjunto compacto de Ω.

Seja $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Fixado $\alpha \geq 0$ associaremos os operadores projeções $(P_{[\alpha]})_Q f$, $(P_{(\alpha)})_Q f$ e $(P_j)_Q f$, conforme k seja igual a $[\alpha], (\alpha)$ ou $j \in N$ qualquer, respectivamente, em (**2.9**). Neste caso, cada um dos três operadores projeções definirão funções maximais. O objetivo desta seção será relacionar estas três funções maximais entre si. Estamos interessados no caso onde j satisfaz $j \geq [\alpha] \geq (\alpha)$.

Dados um conjunto aberto Ω de R^n, uma função f localmente integrável sobre Ω e um número real $\alpha \geq 0$, tomamos $k := [\alpha]$ ou (α) e definimos as *funções maximais*

$$\begin{cases} f^\sharp_{\alpha,\Omega}(x) := f^\sharp_\alpha(x) := \sup\limits_{\Omega \supset Q \ni x} \dfrac{1}{|Q|^{1+\frac{\alpha}{n}}} \displaystyle\int_Q |f - P_Q f| \\ \\ f^\flat_{\alpha,\Omega}(x) := f^\flat_\alpha(x) := \sup\limits_{\Omega \supset Q \ni x} \dfrac{1}{|Q|^{1+\frac{\alpha}{n}}} \displaystyle\int_Q |f - P^\flat_Q f| \end{cases} \tag{2.20}$$

onde P_Q é o operador projeção $(P_{[\alpha]})_Q$ e $P^\flat_Q$ é o operador projeção $(P_{(\alpha)})_Q$ e os supremos são tomados sobre os cubos Q com $x \in\subset Q\Omega$.

Em algumas ocasiões será necessário considerar Ω igual a um cubo fixo de R^n, digamos $\Omega = Q$. Neste caso, o supremo em (**2.20**) será tomado sobre subcubos $\tilde{Q}$ satisfazendo $x \in \tilde{Q} \subseteq Q$.

Seja c uma constante real. Então (**2.20**) produzem as seguintes relações válidas em Ω:

$$\begin{cases} f^\sharp_\alpha \geq 0, \quad f^\sharp_\alpha = (-f)^\sharp_\alpha, \quad (f+g)^\sharp_\alpha \leq f^\sharp_\alpha + g^\sharp_\alpha \quad \text{e} \quad (cf)^\sharp_\alpha = |c| f^\sharp_\alpha \\ \\ f^\flat_\alpha \geq 0, \quad f^\flat_\alpha = (-f)^\flat_\alpha, \quad (f+g)^\flat_\alpha \leq f^\flat_\alpha + g^\flat_\alpha \quad \text{e} \quad (cf)^\flat_\alpha = |c| f^\flat_\alpha. \end{cases} \tag{2.21}$$

Portanto, os operadores $\sharp : f \mapsto f^\sharp_\alpha$ e $\flat : f \mapsto f^\flat_\alpha$ são sublineares.

Naturalmente pode-se restringir os operadores $\sharp$ e $\flat$ para subespaços de $L^1_{loc}(\Omega)$; por exemplo, $L^p(\Omega)$ onde $1 \leq p \leq \infty$. (A inclusão $L^p(\Omega) \subseteq L^1_{loc}(\Omega)$ para $1 \leq p \leq \infty$ está provada em Adams [1].) É o que faremos na **subseção 2.3** adiante.

Mostraremos a seguir que valem as relações

$$|f^\sharp_\alpha(x) - g^\sharp_\alpha(x)| \leq (f-g)^\sharp_\alpha(x) \quad \text{e} \quad |f^\flat_\alpha(x) - g^\flat_\alpha(x)| \leq (f-g)^\flat_\alpha(x) \tag{2.22}$$

para todo ponto x de Ω onde $f^\sharp_\alpha(x), g^\sharp_\alpha(x), f^\flat_\alpha(x)$ e $g^\flat_\alpha(x)$ forem finitos.

De fato, para o operador $\sharp$, (**2.22**) é uma conseqüência de (**2.21**) pois

$$\begin{cases} f^\sharp_\alpha(x) = (f-g+g)^\sharp_\alpha(x) \le (f-g)^\sharp_\alpha(x) + g^\sharp_\alpha(x) \\ g^\sharp_\alpha(x) = (f-g-f)^\sharp_\alpha(x) \le (f-g)^\flat_\alpha(x) + f^\flat_\alpha(x). \end{cases}$$

Para o operador $\flat$ segue de maneira análoga.

No próximo capítulo apresentaremos funções maximais biparamétricas; uma generalização baseada no seguinte

Lema 2.2 . *Seja* $\alpha \ge 0$. *Existem constantes* $0 < c_1, c_2 \le 1$ *dependendo da dimensão* n *e do grau* k *tais que, para todo* $x \in \Omega$,

$$\begin{cases} i) \quad c_1 f^\sharp_\alpha(x) \le \sup\limits_{\Omega \supset Q \in x} \inf\limits_{\pi \in P_k} \dfrac{1}{|Q|^{1+\frac{\alpha}{n}}} \displaystyle\int_Q |f-\pi| \le f^\sharp_\alpha(x) \quad \text{onde} \quad k = [\alpha] \\ ii) \quad c_2 f^\flat_\alpha(x) \le \sup\limits_{\Omega \supset Q \in x} \inf\limits_{\pi \in P_k} \dfrac{1}{|Q|^{1+\frac{\alpha}{n}}} \displaystyle\int_Q |f-\pi| \le f^\flat_\alpha(x) \quad \text{onde} \quad k = (\alpha). \end{cases}$$

Demonstração . Mostraremos $i)$. O item $ii)$ segue de modo análogo.

A segunda desigualdade em $i)$ segue do fato de $P_Q f$ ser um elemento de P_k .

Para demonstrar a primeira desigualdade em $i)$ fixemos um polinômio π de P_k .

Integrando o item $ii)$ da **Proposição 2.1** , com constante c_0 , sobre Q vem

$$\int_Q |f - P_Q f| \le (1+c_0) \int_Q |f-\pi|.$$

Dividindo esta desigualdade por $|Q|^{1+\frac{\alpha}{n}}$, tomando o ínfimo sobre $\pi \in P_k$ e a seguir tomando o supremo sobre os cubos Q com $x \in Q \subset \Omega$ concluímos a primeira desigualdade em $i)$ onde a constante c_1 vale $\frac{1}{1+c_0} \le 1$ e depende de k e n . ■

As funções maximais $f^\sharp_\alpha$ e $f^\flat_\alpha$ dependem do parâmetro α . Relacionaremos $f^\sharp_\alpha$ e $f^\flat_\alpha$.

Para todo α inteiro tem-se $(\alpha) = [\alpha - 1]$; donde $f^\flat_\alpha = f^\sharp_{\alpha-1}$.

Para todo α não inteiro tem-se $(\alpha) = [\alpha]$; donde $f^\flat_\alpha = f^\sharp_\alpha$.

Vale o seguinte resultado geral

Corolário 2.3 . *Sejam* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ *e* $\alpha \ge 0$. *Existe uma constantes* $c \ge 1$ *dependendo da dimensão* n *e do grau* k *onde*

$$f^\sharp_\alpha(x) \le c f^\flat_\alpha(x) \quad \text{para todo } x \in \Omega.$$

Demonstração . De $(\alpha) \le [\alpha]$ para todo $\alpha \ge 0$ decorre $P_{(\alpha)} \subseteq P_{[\alpha]}$. Portanto,

$$\inf_{\pi \in P_{[\alpha]}} \frac{1}{|Q|^{1+\frac{\alpha}{n}}} \int_Q |f-\pi| \le \inf_{\pi \in P_{(\alpha)}} \frac{1}{|Q|^{1+\frac{\alpha}{n}}} \int_Q |f-\pi|.$$

Agora basta tomar o supremo sobre os cubos Q com $x \in Q \subset \Omega$ e utilizando o **Lema 2.2** seguem

$$c_1 f^\sharp_\alpha(x) \le \sup_{\Omega \supset Q \ni x} \inf_{\pi \in P_{[\alpha]}} \frac{1}{|Q|^{1+\frac{\alpha}{n}}} \int_Q |f-\pi| \le \sup_{\Omega \supset Q \ni x} \inf_{\pi \in P_{(\alpha)}} \frac{1}{|Q|^{1+\frac{\alpha}{n}}} \int_Q |f-\pi|.$$

Donde obtemos o corolário com constante $c := 1/c_1 \ge 1$ dependendo de n e k . ■

No **Corolário 2.3** nota-se que f^b_α é uma cota superior natural para $f^\sharp_\alpha$. Portanto, muitas estimativas obtidas para f^b_α seguem imediatamente para $f^\sharp_\alpha$. Por exemplo, se $f^b_\alpha \in L^p(\Omega)$ então $f^\sharp_\alpha \in L^p(\Omega)$ para $1 \leq p \leq \infty$. (Este é o argumento da demonstração do **Corolário 2.6** adiante.) Por outro lado, apresentaremos, logo após a demonstração da próxima proposição, um resultado que vale para $f^\sharp_\alpha$ mas não vale para f^b_α quando α é inteiro.

Uma generalização das funções maximais definidas em (**2.20**) é feita da seguinte maneira: considerando o operador projeção $(P_j)_Q$ dado em (**2.9**) com $j \in N$, definimos a *função maximal*

$$f_{j,\alpha,\Omega}(x) := f_j(x) := \sup_{\Omega \supset Q \ni x} \frac{1}{|Q|^{1+\frac{\alpha}{n}}} \int_Q |f - (P_j)_Q f| \, . \tag{2.23}$$

Quando j for igual a $[\alpha]$ ou (α) tem-se f_j igual $f^\sharp_\alpha$ ou f^b_α, respectivamente. Se $j > [\alpha]$ o próximo resultado garante a equivalência entre f_j e $f^\sharp_\alpha$ quando $\Omega = R^n$.

Proposição 2.4 . *Sejam* $j > [\alpha]$, $x \in \Omega$ *e* $f \in L^1(\Omega) + L^\infty(\Omega)$. *Em relação às definições dadas em* (**2.23**) *e* (**2.20**), *existem constantes* c_1, c_2 *e* $c_3 > 0$ *dependendo somente de* α, j *e* n *tais que*

$$\begin{cases} i) \;\; c_1 f_j(x) \leq f^\sharp_\alpha(x) \leq c_2 f_j(x) & \text{quando } \Omega = R^n \\[2ex] ii) \;\; c_1 f_j(x) \leq f^\sharp_\alpha(x) \leq c_3 \left\{ f_j(x) + \int_\Omega |f| \right\} & \text{quando } \Omega = Q_0 \text{ cubo unitário de } R^n . \end{cases}$$

Antes de demonstrar a proposição acima comentaremos alguns fatos a ela relacionados. O item *i*) da **Proposição 2.4** será utilizado para obter o **Teorema 4.8** (cuja demonstração é válida para $\Omega = R^n$). A versão do **Teorema 4.8** para $\Omega =$ cubos de R^n não pode ser demonstrada utilizando o item *ii*) da **Proposição 2.4** pois o fator $\int_\Omega |f|$ atrapalha o argumento empregado no caso $\Omega = R^n$ (isto poderá ser notado na demonstração do **Teorema 4.8**). Até lá contentaremos com o fato da validade do item *ii*) da **Proposição 2.4** quando Ω for um cubo qualquer de R^n, conforme DeVore-Sharpley [1]. Neste caso, a constante c_3 dependerá de Ω.

Demonstração da Proposição 2.4. As primeiras desigualdades em *i*) e *ii*) valem independentemente de Ω ser R^n ou o cubo unitário Q_0 e utiliza o **Lema 2.2**. De fato, para demonstrar a primeira desigualdade em *i*) fixemos um polinômio π de $P_{[\alpha]}(\subset P_j)$. Integrando o item *ii*) da **Proposição 2.1**, com constante c_0, sobre Q vem

$$\int_Q |f - (P_j)_Q f| \leq (1 + c_0) \int_Q |f - \pi| \, .$$

Dividindo esta desigualdade por $|Q|^{1+\frac{\alpha}{n}}$, tomando o ínfimo sobre $\pi \in P_{[\alpha]}$, e a seguir tomando o supremo sobre todos os cubos Q com $x \in Q \subset \Omega$ concluímos a primeira desigualdade em *i*) onde a constante c_1 vale $\frac{1}{c+c_0} \leq 1$ e depende de α, j e n pois c_0 depende destes parâmetros. A primeira desigualdade em *ii*) é a mesma de *i*).

Verificaremos o item *ii*). Para isto, consideremos dois casos: $j = [\alpha]$ e $j > [\alpha]$. Se $j = [\alpha]$ então $f_j = f^\sharp_\alpha$. Portanto a segunda desigualde em *i*) está trivialmente satisfeita. No caso $j > [\alpha]$ utilizaremos um processo iterativo.

A relação de recorrência estará baseada na decomposição de f utilizando projeções em P_j. Iniciaremos escolhendo m cubos $Q =: Q_1 \subset Q_2 \cdots \subset Q_m \subset \Omega$ onde lado de $Q_{i+1} = 2$ lado de Q_i, ou seja, $|Q_{i+1}| = 2^n |Q_i|$ para $i = 1, 2, \cdots, m$.

Por (**2.10**) e denotando $(P_j)_{Q_i}$ de grau $j > [\alpha]$ por P_{Q_i} podemos escrever

$$f(x) = f(x) - P_{Q_1} f(x) + \sum_{i=1}^{m-1} P_{Q_i}(f(x) - P_{Q_{i+1}} f(x)) + P_{Q_m} f(x) \quad \text{para todo } x \in Q \, . \tag{2.24}$$

Em geral, para $i = 1, 2, \cdots, m-1$ e utilizando (**2.13**) com y_i percorrendo Q_i e fixado qualquer $x_{i,0} \in Q_i$ segue

$$\begin{aligned} P_{Q_i}(f - P_{Q_{i+1}} f)(y_i) &= \sum_{|\nu| \leq j} \left\{ \frac{1}{|Q_i|} \int_{Q_i} \left(f - P_{Q_{i+1}} f\right) h_{i,\nu} \right\} \left(\frac{y_i - x_{i,0}}{|Q_i|^{1/n}} \right)^{\nu} \\ &=: \sum_{|\nu| = j} \left\{ \frac{1}{|Q_i|} \int_{Q_i} \left(f - P_{Q_{i+1}} f\right) h_{i,\nu} \right\} \left(\frac{y_i - x_{i,0}}{|Q_i|^{1/n}} \right)^{\nu} + \rho_i \end{aligned} \tag{2.25}$$

onde ρ_i são polinômios de grau $|\nu| \leq j-1$.

Similarmente, para o m-ésimo cubo vale

$$P_{Q_m} f(y_m) = \sum_{|\nu|=j} \left\{ \frac{1}{|Q_m|} \int_{Q_m} (f - P_{Q_{m+1}} f) h_{m,\nu} \right\} \left(\frac{y_m - x_{m,0}}{|Q_1|^{1/n}} \right)^{\nu} + \rho_m . \tag{2.26}$$

Seja $\rho := \sum_{i=1}^{m} \rho_i$ o polinômio de grau $\leq j-1$.

Sendo $Q \subset Q_i$ para todo $i = 1, 2, \cdots, m$, podemos restringir os pontos de y_i e $x_{i,0}$ de Q_j utilizados em (**2.25**) e (**2.26**), ao cubo Q. (Denotaremos esses pontos simplesmente por y e x_0, respectivamente.) Substituindo (**2.25**) e (**2.26**) em (**2.24**), passando ρ para o outro lado da igualdade, integrando sobre Q e observando a limitação uniforme de $h_{i,\nu}$ em (**2.16**) com constante c_0, seguem

$$\begin{aligned} \int_Q |f - \rho| &\leq \int_Q |f - P_{Q_1} f| + c_0 \sum_{|\nu|=j} \sum_{i=1}^{m-1} \left\{ \frac{1}{|Q_i|} \int_{Q_i} |f - P_{Q_{i+1}} f| \right\} \int_Q \left| \left(\frac{y - x_0}{|Q_i|^{1/n}} \right)^{\nu} \right| dy \\ &\quad + c_0 \sum_{|\nu|=j} \left\{ \frac{1}{|Q_m|} \int_{Q_m} |f| \right\} \int_Q \left| \left(\frac{y - x_0}{|Q_m|^{1/n}} \right)^{\nu} \right| dy =: I + II + III . \end{aligned} \tag{2.27}$$

Estimaremos I, II e III.

Pela definição (**2.23**),

$$I \leq |Q|^{1+\frac{\alpha}{n}} f_j(x) . \tag{2.28}$$

Para todo y e $x_0 \in Q$ tem-se $|y - x_0| \leq \sqrt{n}|Q|^{1/n}$. Por construção $x \in Q_i \subset Q_{i+1}$, $|Q_{i+1}| = 2^n |Q_i|$ e $|Q_i| = 2^{(i-1)n}|Q|$ onde $i = 1, 2, \cdots, m$. Destas considerações seguem o

$$\begin{aligned} II &\leq c_0 n^{j/2} \sum_{|\nu|=j} \sum_{i=1}^{m-1} \left\{ \frac{2^n}{|Q_{i+1}|} \int_{Q_{i+1}} |f - P_{Q_{i+1}} f| \right\} \left(\frac{|Q|}{|Q_i|} \right)^{j/n} |Q| \\ &\leq c_0 n^{j/2} \left(\sum_{|\nu|=j} 1 \right) 2^n \sum_{i=1}^{m-1} |Q_{i+1}|^{\alpha/n} f_j(x) 2^{(1-i)j} |Q| \\ &\leq c_0 n^{j/2} \left(\sum_{|\nu|=j} 1 \right) 2^{n+j} \left(\sum_{i=1}^{m-1} 2^{i\alpha} . 2^{-ij} \right) f_j(x) |Q|^{1+\frac{\alpha}{n}} \\ &\leq c f_j(x) |Q|^{1+\frac{\alpha}{n}} \end{aligned} \tag{2.29}$$

onde, usando (**1.16**), a constante c vale

$$c_0 n^{j/2} 2^{n+j} \frac{(n+j-1)!}{(n-1)! j!} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{j-\alpha}} \right)^i < \infty \tag{2.30}$$

e independe de m. A convergência da série geométrica em (**2.30**) está garantida pois a razão $\frac{1}{2^{j-\alpha}}$ é estritamente menor do que 1 para todo $j > [\alpha]$.

Similarmente ao que foi feito para obter (**2.29**) seguem

$$
\begin{aligned}
III &\leq c_0 n^{j/2} \sum_{|\nu|=j} \left\{ \frac{1}{|Q_m|} \int_{Q_m} |f| \right\} \left(\frac{|Q|}{|Q_m|} \right)^{j/n} |Q| \\
&\leq c_0 n^{j/2} \left(\frac{1}{|Q_m|} \int_{Q_m} |f| \right) \left(\sum_{|\nu|=j} 1 \right) \left(\frac{|Q|}{|Q_m|} \right)^{j/n} |Q| .
\end{aligned} \tag{2.31}
$$

(**2.28**), (**2.29**) e (**2.31**) em (**2.27**) resulta

$$
\frac{1}{|Q|^{1+\frac{\alpha}{n}}} \int_Q |f-\rho| \leq (1+c) f_j(x) + c_0 n^{j/2} |Q|^{(j-\alpha)/n} \left(\sum_{|\nu|=j} 1 \right) \left(\frac{1}{|Q_m|} \right)^{j/n} \int_{Q_m} |f| . \tag{2.32}
$$

Se $\Omega = R^n$ fazendo $m \to \infty$ em (**2.32**) segue $\dfrac{1}{|Q_m|} \to 0$ e $\displaystyle\int_{Q_m} |f| \leq ||f||_{L^1(R^n)} < \infty$. Assim, (**2.32**) fica,

$$
\frac{1}{|Q|^{1+\frac{\alpha}{n}}} \int_Q |f-\rho| \leq (1+c) f_j(x)
$$

onde a constante c é dada por (**2.30**).

Lembrando que ρ é um polinômio de grau $\leq j-1$ podemos utilizar o **Lema 2.2** com constante d_{j-1} (onde d_{j-1} depende de n e $j-1$). Assim, tomando, na desigualdade acima, o supremo sobre os cubos Q com $x \in Q \subset \Omega$, segue a relação de recorrência

$$
d_{j-1} f_{j-1}(x) \leq (1+c) f_j(x) .
$$

Após a $(j-[\alpha])$-ésima iteração da relação acima resulta na desigualdade à direita em $i)$, pois $d_{[\alpha]-1} \cdots d_{j-1} d_j f_\alpha^\sharp = d_{[\alpha]-1} \cdots d_{j-1} d_j f_{[\alpha]} \leq (1+c)^{[\alpha]-1} f_j$.

Quando $\Omega = Q_0$ escolhemos m tal que $Q_m \subset Q_0$ cujo lado de $Q_0 < 2$ lado de Q_m, ou seja, $|Q_0| < 2^n |Q_m|$. Neste caso as estimativas, em (**2.27**), para I e II são idênticas ao caso $\Omega = R^n$; a estimativa para III segue de modo alternativo, como veremos a seguir.

$$
\begin{aligned}
III &\leq c_0 \frac{2^n}{|Q_0|} \int_{Q_0} |f| \left\{ \sum_{|\nu|=j} \left(2^n \frac{|Q|}{|Q_0|} \right)^{j/n} \right\} |Q| \\
&\leq c_0 2^{n+j} \left(\sum_{|\nu|=j} 1 \right) \left(\frac{1}{|Q_0|^{1+\frac{j}{n}}} \int_{Q_0} |f| \right)^{j/n} |Q|^{1+\frac{j}{n}} \\
&= c_0 2^{n+j} \frac{(n+j-1)!}{(n-1)!j!} \frac{|Q|^{1+\frac{j}{n}}}{|Q_0|^{1+\frac{j}{n}}} \int_{Q_0} |f| .
\end{aligned} \tag{2.33}
$$

Observamos que o cubo Q satisfaz $Q \subset \Omega = Q_0$; logo $|Q| \leq |Q_0| = 1$. Este fato e (**2.28**),

(**2.29**) e (**2.33**) em (**2.27**) resultam

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|^{1+\frac{\alpha}{n}}}\int_Q |f-\rho| &\leq (1+c)f_j(x) + c_0 2^{n+j}\frac{(n+j-1)!}{(n-1)!j!}|Q|^{(j-\alpha)/n}\frac{1}{|Q_0|^{1+\frac{j}{n}}}\int_{Q_0}|f| \\
&\leq (1+c)f_j(x) + c_0 2^{n+j}\frac{(n+j-1)!}{(n-1)!j!}\frac{1}{|Q_0|^{1+\frac{\alpha}{n}}}\int_{Q_0}|f| \qquad (2.34) \\
&= (1+c)f_j(x) + c_4\int_{Q_0}|f|
\end{aligned}
$$

onde a constante c é dada por (**2.30**) e $c_4 := c_0 2^{n+j}\frac{(n+j-1)!}{(n-1)!j!}$.

Tomando, em (**2.34**), o supremo sobre os cubos Q com $x \in Q \subset \Omega$, segue a relação de recorrência

$$
d_{j-1}f_{j-1}(x) \leq \max\{(1+c), c_4\}\left[f_j(x) + \int_{Q_0}|f|\right]. \qquad (2.35)
$$

A aplicação reiterada de (**2.35**) resulta na segunda desigualdade em $ii)$, pois

$$
\begin{aligned}
f_{j-2}(x) &\leq \frac{\max\{(1+c), c_4\}}{d_{j-2}}\left[f_{j-1}(x) + \int_{Q_0}|f|\right] \\
&\leq \frac{\max\{(1+c), c_4\}}{d_{j-2}}\left\{\frac{\max\{(1+c), c_4\}}{d_{j-1}}\left[f_j(x) + \int_{Q_0}|f|\right] + \int_{Q_0}|f|\right\} \\
&\leq \frac{\max\{(1+c), c_4\}}{d_{j-2}}\max\left\{\frac{\max\{(1+c), c_4\}}{d_{j-1}}, 1\right\}\left[f_j(x) + 2\int_{Q_0}|f|\right] \\
&\leq \frac{\max\{(1+c), c_4\}}{d_{j-2}}\max\left\{\frac{\max\{(1+c), c_4\}}{d_{j-1}}, 1\right\}2\left[f_j(x) + \int_{Q_0}|f|\right].
\end{aligned}
$$

Análogamente estimam-se $f_{j-3}(x)$, $f_{j-4}(x)$, $\cdots \leq$ constante dependendo de j, c e c_4 multiplicado por $\left[f_j(x) + \int_{Q_0}|f|\right]$. ■

A estimativa superior em $i)$ da **Proposição 2.4** não vale para $f_\alpha^\flat$, no lugar de $f_\alpha^\sharp$, quando α é inteiro. De fato, quando $j > (\alpha)$ e α é inteiro, a razão $\frac{1}{2^{j-\alpha}}$ assume o valor 1 para $j = \alpha > (\alpha)$ e a série geométrica em (**2.30**) não converge.

2.3 Funções Maximais Definindo Espaços Regulares

Seja $0 < q < \infty$. O espaço $L^q_{loc}(\Omega)$ é constituído pelas funções $f \in L^q_{loc}(\Omega)$ tal que $|f|^q$ é integrável sobre qualquer subconjunto compacto de Ω.

Pela *desigualdade de Hölder* segue $L^p(\Omega) \subseteq L^p_{loc}(\Omega) \subseteq L^1_{loc}(\Omega)$ para $1 \leq p \leq \infty$.[38]

Assim, faz sentido falar em $f_\alpha^\sharp$ quando f é um elemento de $L^p(\Omega)$.

Definimos os *espaços regulares*

$$
\begin{cases}
C_p^\alpha := C_p^\alpha(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega) : f_\alpha^\sharp \in L^p(\Omega)\} \\
\mathcal{C}_p^\alpha := \mathcal{C}_p^\alpha(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega) : f_\alpha^\flat \in L^p(\Omega)\}
\end{cases} \qquad (2.36)
$$

[38] Estas inclusões estão abordadas em Villani [2], por exemplo.

para $\alpha > 0$ e $1 \leq p \leq \infty$, com *seminormas* e *normas*, respectivamente,

$$|f|_{C_p^\alpha} := \|f_\alpha^\sharp\|_{L^p(\Omega)} \qquad \text{e} \qquad |f|_{\mathcal{C}_p^\alpha} := \|f_\alpha^\flat\|_{L^p(\Omega)} \tag{2.37}$$

$$\|f\|_{C_p^\alpha} := \|f\|_{L^p(\Omega)} + |f|_{C_p^\alpha} \qquad \text{e} \qquad \|f\|_{\mathcal{C}_p^\alpha} := \|f\|_{L^p(\Omega)} + |f|_{\mathcal{C}_p^\alpha} \tag{2.38}$$

O número real $\alpha > 0$ é chamado *índice de regularidade.*

O espaço C_p^0 onde $1 \leq p \leq \infty$ será definido na **seção 4.5**.

As desigualdades triangulares das normas em C_p^α e $\mathcal{C}_p^\alpha$ provém da subaditividade de $\sharp$ e $\flat$, respectivamente. De fato, (**2.21**) implicam

$$\begin{cases} \|(f+g)_\alpha^\sharp\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_\alpha^\sharp + g_\alpha^\sharp\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_\alpha^\sharp\|_{L^p(\Omega)} + |g_\alpha^\sharp\|_{L^p(\Omega)} \\ \\ \|(f+g)_\alpha^\flat\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_\alpha^\flat + g_\alpha^\flat\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_\alpha^\flat\|_{L^p(\Omega)} + \|g_\alpha^\flat\|_{L^p(\Omega)} \end{cases} \tag{2.39}$$

Donde, por (**2.37**), (**2.38**), (**2.39**) e pela desigualdade triangular satisfeita pela norma $\|.\|_{L^p(\Omega)}$, segue a afirmação.

Antes de verificar que C_p^α e $\mathcal{C}_p^\alpha$ são espaços de Banach apresentaremos o mecanismo principal de sua demonstração. Suponhamos

$$\begin{cases} \lim\limits_{m\to\infty} \int_\Omega |h_m - h|^p = 0 & \text{se } 1 \leq p < \infty \\ \\ \lim\limits_{m\to\infty} \|h_m - h\|_{L^\infty(\Omega)} = 0 & \text{se } p = \infty \end{cases} \tag{2.40}$$

Sem perda de generalidade, escolhemos um cubo Q de R^n e fazemos $\Omega := Q$; o objetivo será obter (**2.43**), adiante, que não dependerá da escolha de Q.

Necessitaremos da finitude do volume de Q. A *desigualdade de Hölder* com expoentes conjugados p e $p/(p-1)$; por convenção $1/\infty := 0$, produz

$$\begin{cases} \int_Q |h_m - h| \leq |Q|^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_Q |h_m - h|^p\right)^{1/p} & \text{se } 1 \leq p < \infty \\ \\ \int_Q |h_m - h| \leq |Q| \; \|h_m - h\|_{L^\infty(Q)} & \text{se } p = \infty \end{cases} \tag{2.41}$$

Por (**2.40**) e (**2.41**) segue, para $1 \leq p \leq \infty$,

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Omega |h_m - h| = 0\,. \tag{2.42}$$

Seja P_Q operador projeção de grau $k = [\alpha]$. Integrando sobre Q as seguintes desigualdades

$$\begin{cases} |h_m - P_Q h_m| \geq |h - P_Q h| - |h_m - h| - |P_Q(h_m - h)| \\ \\ |h - P_Q h| \leq |h_m - P_Q h_m| + |h_m - h| + |P_Q(h_m - h)|\,; \end{cases}$$

e utilizando a seguinte estimativa obtida baseada no item i) da **Proposição 2.1** com constante c_0

$$\int_Q |P_Q(h_m - h)| \leq |Q| \; \|P_Q(h_m - h)\|_{L^\infty(Q)} \leq c_0 \int_Q |h_m - h|$$

seguem, respectivamente,

$$\begin{cases} \int_Q |h_m - P_Q h_m| \geq \int_Q |h - P_Q h| - (1 + c_0) \int_Q |h_m - h| \\ \\ \int_Q |h - P_Q h| \leq \int_Q |h_m - P_Q h_m| + (1 + c_0) \int_Q |h_m - h|\,. \end{cases}$$

Para cada desigualdade da relação acima tomamos o limite superior e o limite inferior quando m tendo ao infinito; por (**2.42**) obtemos a igualdade

$$\int_Q |h - P_Q h| = \lim_{m\to\infty} \int_Q |h_m - P_Q h_m|.$$

Portanto, para um cubo $Q \ni x$, segue da desigualdade acima,

$$\frac{1}{|Q|^{1+\frac{\alpha}{n}}} \int_Q |h - P_Q h| = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{|Q|^{1+\frac{\alpha}{n}}} \int_Q |h_m - P_Q h_m| \leq \liminf_{m\to\infty} (h_m)^\sharp_\alpha(x).$$

Tomando o supremo sobre todos os cubos Q tais que $\Omega \supset Q \ni x$ na desigualdade acima vem

$$h^\sharp_\alpha(x) \leq \liminf_{m\to\infty} (h_m)^\sharp_\alpha(x). \tag{2.43}$$

A relação (**2.43**) mostra a atuação do operador $\sharp$ nos elementos da seqüência h_m e no limite h. Além disso, (**2.43**) independe da escolha do cubo Q. Vale uma relação análoga a (**2.43**) para o operador $\flat$, isto é, $h^\flat_\alpha(x) \leq \liminf_{m\to\infty} (h_m)^\flat_\alpha(x)$.

Agora estamos em condições de obter o

Teorema 2.5 . *C^α_p e $\mathcal{C}^\alpha_p$ são espaços de Banach em relação às normas* (**2.38**).

Demonstração . Que C^α_p e $\mathcal{C}^\alpha_p$ são espaços vetoriais normados em relação às normas definidas em (**2.38**), respectivamente, é a parte fácil do teorema. Faremos a outra parte. Mostraremos que C^α_p é completo. Para $\mathcal{C}^\alpha_p$ o procedimento é análogo.

Suponha $\{f_m \in C^\alpha_p : m \in N\}$ uma seqüência de Cauchy em C^α_p.

Pela inclusão $C^\alpha_p \subseteq L^p(\Omega)$ e a partir da desigualdade $\|.\|_{L^p(\Omega)} \leq \|.\|_{C^\alpha_p}$ obtida por (**2.38**) resultam que $\{f_m \in L^p(\Omega) : m \in N\}$ também é uma seqüência de Cauchy em $L^p(\Omega)$. Pela completude do espaço $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p \leq \infty$ (este fato pode ser visto, por exemplo, em Adams [1]); existe um elemento f de $L^p(\Omega)$ tal que

$$\lim_{m\to\infty} \|f_m - f\|_{L^p(\Omega)} = 0. \tag{2.44}$$

Usamos (**2.43**) com $\{h_m := f_m \in L^p(\Omega) : m \in N\}$ e $h := f \in L^p(\Omega)$, o *Lema de Fatou*[39] e (**2.38**) para mostrar que f é elemento de $C^\alpha_p(\Omega)$ da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \|f^\sharp_\alpha\|^p_{L^p(\Omega)} &\leq \int_\Omega \liminf_{m\to\infty} |(f_m)^\sharp_\alpha|^p \leq \liminf_{m\to\infty} \int_\Omega |(f_m)^\sharp_\alpha|^p \\ &= \liminf_{m\to\infty} |f_m|^p_{C^\alpha_p} \leq \liminf_{m\to\infty} \|f_m\|^p_{C^\alpha_p} < \infty. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Assim, $f^\sharp_\alpha \in L^p(\Omega)$. Donde $f \in C^\alpha_p(\Omega)$ pois também $f \in L^p(\Omega)$.

Novamente utilizaremos (**2.43**) para mostrar

$$\lim_{m\to\infty} \|f_m - f\|_{C^\alpha_p} = 0. \tag{2.46}$$

Seja m' um número natural fixo.

Consideramos a seqüência $\{h_m := f_m - f_{m'} \in L^p(\Omega) : m \in N\}$ e $h := f - f_{m'} \in L^p(\Omega)$ em (**2.43**) para obter

$$(f - f_{m'})^\sharp_\alpha(x) \leq \liminf_{m\to\infty} (f_m - f_{m'})^\sharp_\alpha(x) \quad \text{para todo } x \in \Omega.$$

[39]Em Wheeden-Sygmund [1] e em Darst [1] estudam-se o que acontece se o lim inf for substituído por lim sup no *Lema de Fatou.* Segundo Klei-Miyara [1], o *Lema de Fatou* para várias variáveis (em espaço de dimensão finita) foi estudado por Z. Artstein em 1979, W. Hildebrand e J.-F. Mertens em 1971 e D. Schimeidler em 1970; em dimensão infinita por E. J. Balder em 1988.

Na desigualdade acima aplicamos o procedimento idêntico utilizado ao obter (**2.45**) . Donde,

$$\|(f - f_{m'})^\sharp_\alpha\|^p_{L^p(\Omega)} \le \liminf_{m\to\infty} \|f_m - f_{m'}\|^p_{C^\alpha_p} \le \lim_{m\to\infty} \|f_m - f_{m'}\|^p_{C^\alpha_p}.$$

Tomando o $\lim\limits_{m'\to\infty}$ na desigualdade acima e recordando que $\{f_m \in C^\alpha_p(\Omega) \ : m \in N\}$ é uma seqüência de Cauchy em $C^\alpha_p(\Omega)$ e utilizando (**2.37**) seguem

$$\lim_{m'\to\infty} |f - f_{m'}|^p_{C^\alpha_p} = \lim_{m'\to\infty} \|(f - f_{m'})^\flat_\alpha\|^p_{L^p(\Omega)} \le \lim_{m'\to\infty}\lim_{m\to\infty} \|f_m - f_{m'}\|^p_{L^p(\Omega)} = 0.$$

Pela relação acima, (**2.44**) e (**2.38**) vem

$$\lim_{m\to\infty} \|f - f_m\|^p_{C^\alpha_p} = \lim_{m\to\infty} |f - f_m|^p_{C^\alpha_p} + \lim_{m\to\infty} \|f - f_m\|^p_{L^p(\Omega)} = 0.$$

Esta igualdade é o mesmo que (**2.46**) , isto é, f_m converge para f em $C^\alpha_p(\Omega)$. ■

Para α não inteiro temos $f^\sharp_\alpha = f^\flat_\alpha$; neste caso, $C^\alpha_p = C^\alpha_p$ onde $1 \le p \le \infty$.
Mais ainda, o **Corolário 2.3** produz o

Corolário 2.6 . *Se $\alpha > 0$ e $1 \le p \le \infty$ então $C^\alpha_p \subseteq C^\alpha_p$.* ■

Encerraremos este capítulo apresentando duas aplicações das funções maximais $f^\sharp_\alpha$ e $f^\flat_\alpha$ nas **subseções 2.4.1** e **2.4.2** a seguir.

2.4 Aplicações

2.4.1 Funções Maximais Medindo Regularidade Local

Mostraremos que as funções maximais $f^\sharp_\alpha$ e $f^\flat_\alpha$ controlam a regularidade de uma função f. Inicialmente estimaremos as derivadas dos polinômios $P_Q f$ e $P^\flat_Q f$.

Lema 2.7 . *Dados os cubos $Q^* \subset Q \subset R^n$ e o número real $\alpha > 0$, sejam P_{Q^*} e P_Q operadores projeções de grau $k = [\alpha]$ e $P^\flat_{Q^*}$ e $P^\flat_Q$ operadores projeções de grau $k = (\alpha)$. Se $x \in Q^*$ então existem constantes c_1 e $c_2 > 0$ dependendo de n, k e ν tais que*

$$\begin{cases} i) & \|D^\nu(P_Q f - P_{Q^*} f)\|_{L^\infty(Q^*)} \le c_1 |Q|^{\frac{\alpha-|\nu|}{n}} \inf\limits_{u\in Q^*} f^\sharp_\alpha(u) \\ \\ ii) & \|D^\nu(P^\flat_Q f - P^\flat_{Q^*} f)\|_{L^\infty(Q^*)} \le c_2 |Q|^{\frac{\alpha-|\nu|}{n}} \inf\limits_{u\in Q^*} f^\flat_\alpha(u) \end{cases}$$

para $0 \le |\nu| < \alpha$. As desigualdades em i) e ii) ainda valem para $|\nu| = \alpha$ se $|Q| \le 2^n|Q^*|$.

Observamos que, se $|\nu| > \alpha$, as derivadas $D^\nu(P_Q f - P_{Q^*} f)$ e $D^\nu(P^\flat_Q f - P^\flat_{Q^*} f)$ são nulas e as desigualdas em $i)$ e $ii)$ estarão trivialmente satisfeitas.

Demonstração do Lema 2.7 . Consideremos o caso particular $|Q| \le 2^n|Q^*|$ e $|\nu| \le \alpha$. Donde,

$$\frac{1}{|Q^*|^{|\nu|/n}} \le \frac{2^{|\nu|}}{|Q|^{|\nu|/n}} \le \frac{2^\alpha}{|Q|^{|\nu|/n}}.$$

A *desigualdade de Markov* (**Proposição 1.6**) e a relação acima produzem

$$\begin{aligned} \|D^\nu(P_Q f - P_{Q^*} f)\|_{L^\infty(Q^*)} &\le \frac{\left(k^2\sqrt{2n(n+1)}\right)^{|\nu|}}{|Q^*|^{|\nu|/n}} \|P_Q f - P_{Q^*} f\|_{L^\infty(Q^*)} \\ &\le \frac{\left(k^2\sqrt{2n(n+1)}\right)^{\alpha} 2^\alpha}{|Q|^{|\nu|/n}} \|P_Q f - P_{Q^*} f\|_{L^\infty(Q^*)}. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Por outro lado, (**2.10**) e (**2.19**) com constante c_1 dada por (**2.18**) dependendo de n e k, e $|Q| \le 2^n |Q^*|$ produzem, para todo $x \in Q^* \subset Q$,

$$\begin{aligned}
\|P_Q f - P_{Q^*} f\|_{L^\infty(Q^*)} &\le \|P_Q f - P_{Q^*}(P_Q f)\|_{L^\infty(Q^*)} + \|P_{Q^*}(f - P_Q f)\|_{L^\infty(Q^*)} \\
&\le 0 + \frac{c_1}{|Q^*|} \int_{Q^*} |f - P_Q f| \le \frac{c_1 2^n}{|Q|} \int_Q |f - P_Q f| \\
&\le c_1 2^n |Q|^{\alpha/n} f^\sharp_\alpha(x).
\end{aligned}$$

Tomando o ínfimo sobre o cubo Q^* na desigualdade acima obtemos

$$\|P_Q f - P_{Q^*} f\|_{L^\infty(Q^*)} \le c_1 2^n |Q|^{\alpha/n} \inf_{u \in Q^*} f^\sharp_\alpha(u). \tag{2.48}$$

Portanto, neste caso particular, o item $i)$ é combinação de (**2.47**) e (**2.48**) com a constante c valendo $c_1 \left(k^2 \sqrt{2n(n+1)}\right)^\alpha 2^{n+\alpha}$, dependendo de ν, n e k.

O caso geral para cubos tais que $Q^* \subset Q$ e $|\nu| < \alpha$ segue após escolher uma seqüência finita de cubos encaixantes $Q^* =: Q_1 \subset Q_2 \cdots \subset Q_m \subset Q_{m+1} := Q$ com lado $Q_{i+1} = 2$ lado Q_i para $1 \le i \le m-1$, e lado $Q_{m+1} \le 2$ lado Q_m, isto é, $|Q_{i+1}| = 2^n |Q_i|$ para $1 \le i \le m-1$, e $|Q_{m+1}| \le 2^n |Q_m|$.

Donde,

$$|Q_m| = 2^n |Q_{m-1}| = 2^{2n} |Q_{m-2}| = \cdots = 2^{(m-i-1)n} |Q_{i+1}| = \cdots = 2^{(m-2)n} |Q_2|.$$

A seguir utilizaremos o caso particular visto acima (fazendo $c_2 := c_1 \left(k^2\sqrt{2n(n+1)}\right)^\alpha 2^{n+\alpha}$, após a desigualdade triangular, para obter uma progressão geométrica convergente de razão $\frac{1}{2^{\alpha - |\nu|}}$, onde $\alpha \ne |\nu|$, do seguinte modo

$$\begin{aligned}
\|D^\nu(P_Q f - P_{Q^*} f)\|_{L^\infty(Q^*)} &\le \sum_{i=1}^m \|D^\nu(P_{Q_{i+1}} f - P_{Q_i} f)\|_{L^\infty(Q_i)} \\
&\le c_2 \sum_{i=1}^m |Q_{i+1}|^{\frac{\alpha - |\nu|}{n}} \inf_{u \in Q_i} f^\sharp_\alpha(u) \\
&\le c_2 \sum_{i=1}^m |Q_{i+1}|^{\frac{\alpha - |\nu|}{n}} \inf_{u \in Q^*} f^\sharp_\alpha(u) \\
&= c_2 \left(|Q_{m+1}|^{\frac{\alpha-|\nu|}{n}} + |Q_m|^{\frac{\alpha-|\nu|}{n}} \sum_{i=1}^m \frac{1}{2^{(m-1-i)(\alpha - |\nu|)}} \right) \inf_{u \in Q^*} f^\sharp_\alpha(u) \\
&= c_2 \left[|Q_{m+1}|^{\frac{\alpha-|\nu|}{n}} + |Q_m|^{\frac{\alpha-|\nu|}{n}} \sum_{j=m-2}^{0} \left(\frac{1}{2^{\alpha-|\nu|}}\right)^j \right] \inf_{u \in Q^*} f^\sharp_\alpha(u) \\
&\le c_2 \left(1 + \frac{1}{1 - 2^{-(\alpha-|\nu|)}}\right) |Q|^{\frac{\alpha-|\nu|}{n}} \inf_{u \in Q^*} f^\sharp_\alpha(u). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Seja f uma função definida em um conjunto aberto Ω de R^n.

Fixemos $h \in R^n$. Para todo $x \in \Omega$ tal que $x + h \in \Omega$ definimos o *operador diferença* da função f no ponto x por $\Delta_h f(x) := f(x+h) - f(x)$.

Para um número inteiro positivo r o *operador diferença de ordem* r são potências do operador diferença definidas indutivamente por

$$\Delta_h^r f(x) := \Delta_h(\Delta_h^{r-1} f(x)), \tag{2.49}$$

onde $r = 2, 3, \cdots$ e pontos x de Ω tais que $\{x, x+h, \cdots, x+rh\} \subset \Omega$.[40]

Por convenção, $\Delta_h = \Delta_h^1$.

Alternativamente, nas condições de (**2.49**), podemos escrever

$$\Delta_h^r f(x) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^{r-i} \binom{r}{i} f(x+ih) \qquad \text{onde } r = 1, 2, \cdots . \tag{2.50}$$

Na forma (**2.50**), verifica-se de imediato que o operador Δ_h^r é linear, isto é, $\Delta_h^r(f+g)(x) = \Delta_h^r f(x) + \Delta_h^r g(x)$ onde f e g são funções definidas em Ω; também fica natural definir $\Delta_h^0 f = f$.

(**2.50**) pode ser estimado de duas maneiras:

$$\begin{aligned} i) \quad |\Delta_h^r f(x)| &\leq \left[\max_{0\leq j\leq r} \binom{r}{i}\right] \sum_{i=0}^{r} |f(x+ih)| \\ ii) \quad |\Delta_h^r f(x)| &\leq \left[\max_{0\leq j\leq r} |f(x+ih)|\right] \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} = 2^r \max_{0\leq j\leq r} |f(x+ih)| . \end{aligned} \tag{2.51}$$

Verificaremos que operador diferença Δ_h atuando sobre P_k comporta-se do mesmo modo que o operador diferencial clássico: ambos diminuem o grau do polinômio em uma unidade.

De fato, para o monômio x^ν em R^n com multi-índice $|\nu| = \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_n$ vale

$$\Delta_h(x^\nu) = (x_1+h_1)^{\nu_1} + \cdots + (x_n+h_n)^{\nu_n} - x_1^{\nu_1} \cdots x_n^{\nu_n} = \text{ polinômio de grau } |\nu| - 1 .$$

A linearidade do operador diferença Δ_h aplicado ao polinômio de grau k dado por

$$\pi(x) = \sum_{|\nu|\leq k} c_\nu x^\nu$$

resulta

$$\Delta_h \pi(x) = \sum_{|\nu|\leq k} c_\nu \Delta_h(x^\nu) = \text{ polinômio de grau } k-1 .$$

Por conseguinte:

$$\Delta_h^r \pi = \begin{cases} 0 & \text{se } r > \text{grau de } \pi \\ r! h^r & \text{se } r = \text{grau de } \pi \end{cases} \tag{2.52}$$

Dada uma função f definida no aberto $\Omega \subset R^n$ e fixados $h \in R^n$ e $r \in N$, consideremos o conjunto Ω_h de todos os pontos x de Ω tais que existe um cubo $Q_x \subset \Omega$ tal que $\{x, x+h, \cdots, x+rh\} \subset Q_x$. Em Ω_h o operador diferença de ordem r aplicado à função f pode ser estimado pelas funções maximais $f_\alpha^\sharp$ e $f_\alpha^\flat$. Este é o conteúdo do

Teorema 2.8 . *Sejam $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $h \in R^n$. Existem constantes c_1 e $c_2 > 0$ dependendo de n e de k tais que*

$$i) \quad |\Delta_h^k f(x)| \leq c_1 |h|^\alpha \sum_{i=0}^{k} f_\alpha^\sharp(x+ih) \qquad \textit{para quase todo } x \in \Omega_h \textit{ onde } k > [\alpha]$$

$$ii) \quad |\Delta_h^k f(x)| \leq c_2 |h|^\alpha \sum_{i=0}^{k} f_\alpha^\flat(x+ih) \qquad \textit{para quase todo } x \in \Omega_h \textit{ onde } r > (\alpha) .$$

[40]Generalização de Δ_h^r quando o número real h não é fixo e para subconjuntos infinitos $\{x, x+k, \cdots\} \subset \Omega$ são estudados em Davis [1] juntamente com a representação em série de Newton de uma função utilizando tais operadores.

O teorema acima será utilizado para provar um resultado relacionado com o *espaço de Besov* na **seção 4.2** adiante.

Demonstração do Teorema 2.8 . A prova de $ii)$ é análoga à de $i)$. Provaremos $i)$.

Fixados $h \in R^n$ e o conjunto $\overline{\Omega}_h := \{\, x \in \Omega_h$ *tais que* $x, x+h+\cdots, x+kh$ *são pontos de Lebesgue de* $f\}$ segue que a medida (de Lebesgue) do conjunto $\Omega \backslash \overline{\Omega}_h$ é nula. Portanto, basta provar $i)$ somente para pontos de $\overline{\Omega}_h$.

Escolhemos um ponto x de $\overline{\Omega}_h$ e definimos $y_i := x+ih$ onde $0 \leq i \leq k$. Escolhemos o menor cubo Q tal que $\{y_0, y_1, \cdots, y_k\} \subset Q \subset \Omega$. Desde que cada y_i é um ponto de Lebesgue da função f e se tivermos cubos $Q^* \subset Q$ com $Q^* \downarrow \{y_i\}$, vale $P_{Q^*}f(y_i) \to f(y_i)$ (a ser provado na próxima subseção). Usando o **Lema 2.7**, com $|\nu| = 0$ e constante c_0 dependendo de n e k, seguem

$$\begin{aligned} |P_Q f(y_i) - f(y_i)| &= \lim_{Q^* \downarrow \{y_i\}} |P_Q f(y_i) - P_{Q^*} f(y_i)| \leq \lim_{Q^* \downarrow \{y_i\}} \|P_Q f - P_{Q^*} f\|_{L^\infty(Q^*)} \\ &\leq c_0 |Q|^{\alpha/n} \lim_{Q^* \downarrow \{y_i\}} \inf_{u \in Q^*} f^\sharp_\alpha(u) \leq c_0 |Q|^{\alpha/n} f^\sharp_\alpha(y_i) \leq c_0 k^\alpha |h|^\alpha f^\sharp_\alpha(y_i) . \end{aligned} \tag{2.53}$$

onde na última majoração em (**2.53**) utilizamos o fato de que para um cubo $Q \subset$ cubo de lado de comprimento $kh \subset \Omega$ tem-se $|Q| \leq k^n |h|^n$.

Pela linearidade do operador diferença, (**2.52**), (**2.53**), (**2.50**) e (**2.51**), obteremos sucessivamente as estimativas

$$\begin{aligned} |\Delta^k_h f(x)| &= |\Delta^k_h (f - P_Q f)(x)| \leq \left[\max_{0 \leq j \leq k} \binom{k}{i}\right] \sum_{i=0}^{k} |f(y_i) - P_Q f(y_i)| \\ &\leq \left[\max_{0 \leq j \leq k} \binom{k}{i}\right] c_0 k^\alpha |h|^\alpha \sum_{i=0}^{k} f^\sharp_\alpha(y_i) \leq \left[\max_{0 \leq j \leq k} \binom{k}{i}\right] c_0 k^k |h|^\alpha \sum_{i=0}^{k} f^\sharp_\alpha(y_i) \end{aligned}$$

Assim, conclui-se o item $i)$ do teorema onde $c_1 := \left[\max_{0 \leq j \leq k} \binom{k}{i}\right] c_0 k^k$. ■

2.4.2 Um Resultado Tipo Diferenciação de Lebesgue

Definiremos uma *função maximal tipo Hardy-Littlewood* (localizado em um cubo fixo Q) em termos de (**2.9**), a saber

$$\mathcal{M}_Q f(x) := \begin{cases} \sup_{Q \supset Q^* \ni x} |P_{Q^*} f(x)| & \text{se} \quad x \in Q \\ 0 & \text{se} \quad x \notin Q \end{cases}$$

onde o supremo é tomado sobre todos os cubos Q^* tais que $Q \supset Q^* \ni x$.

Verificaremos que, para todo x no cubo Q, existe uma constante c (dependendo de k e n) tal que

$$\mathcal{M}_Q f(x) \leq c M(f\chi_Q)(x) \tag{2.54}$$

onde M é o operador maximal de Hardy-Littlewood definido na **seção 1.6**.

De fato, fixemos o cubo Q^* de lado $l^* := |Q^*|^{1/n}$. Por (**2.17**) e a constante c (dependendo somente de k e n) dada em (**2.18**),

$$\mathcal{M}_Q f(x) \leq c \sup_{Q \supset Q^* \ni x} \frac{1}{|Q^*|} \int_{Q^*} |f| \leq c \sup_{R^n \supset \tilde{Q} \ni x} \frac{1}{|\tilde{Q}|} \int_{\tilde{Q}} |f\chi_Q| = cM(f\chi_Q)(x) \tag{2.55}$$

para todo $x \in \tilde{Q} \subset R^n$. O último supremo em (**2.55**) é tomado sobre todos os cubos $\tilde{Q} \subset R^n$ contendo x. Assim, (**2.55**) é o mesmo que (**2.54**).

Em particular, por (**2.54**) e utilizando a classificação de operadores dadas na **subseção 1.6.2.1** tem-se que $\mathcal{M}_Q$ é um operador *tipo fraco* $(1,1)$ e *tipo* (∞,∞) pois M é um operador *tipo fraco* $(1,1)$ e *tipo* (∞,∞). Além disso $\mathcal{M}_Q$ é um operador sublinear e, pelo *Teorema de Marcinkiewicz*, segue que $\mathcal{M}_Q$ é um operador *tipo* (p,p) onde $1 < p < \infty$.

Fixado x de um cubo qualquer Q^*, (**2.10**) e (**2.19**) com constante c_0, tem-se

$$\begin{aligned} |f(x) - P_{Q^*}f(x)| &\leq \|f - P_{Q^*}f\|_{L^\infty(Q^*)} \\ &\leq \|f - f_{Q^*}\|_{L^\infty(Q^*)} + \|P_{Q^*}(f - f_{Q^*})\|_{L^\infty(Q^*)} \\ &\leq \|f - f_{Q^*}\|_{L^\infty(Q^*)} + c_0\frac{1}{|Q^*|}\int_{Q^*}|f - f_{Q^*}| \\ &\leq (1 + c_0)\|f - f_{Q^*}\|_{L^\infty(Q^*)}. \end{aligned} \tag{2.56}$$

Afirmamos que se a função f é contínua, a desigualdade (**2.56**) implica

$$\lim_{Q^*\downarrow\{x\}} P_{Q^*}f(x) = f(x). \tag{2.57}$$

De fato, se f é contínua em Q, pelo *Teorema Fundamental do Cálculo,*

$$\lim_{Q^*\downarrow\{x\}} f_{Q^*} = \lim_{Q^*\downarrow\{x\}} \frac{1}{|Q^*|}\int_{Q^*} f(y)\,dy = f(x) \qquad \text{para todo } x \in Q^* \subset Q.$$

A função diferença $f - f_{Q^*}$ é contínua em Q; portanto, assume o máximo em Q, digamos em $x_0 \in Q$. Neste caso, para $x_0 \in Q^* \subset Q$, vale

$$\lim_{Q^*\downarrow\{x_0\}} \|f - f_{Q^*}\|_{L^\infty(Q^*)} = \lim_{Q^*\downarrow\{x_0\}} \|f(x_0) - f_{Q^*}\|_{L^\infty(Q)} = 0.$$

Esta igualdade e (**2.56**) implicam (**2.57**).

Seja $f \in L^1(Q)$. O *tipo fraco* $(1,1)$ de $\mathcal{M}_Q$ mostra que (**2.57**) ainda ocorre para cada ponto de Lebesgue de f. A demonstração deste fato segue as linhas do **Teorema 1.27**.

Capítulo 3

Teoria Maximal em $L^q_{loc}(\Omega)$, $0 < q < \infty$

No **Teorema 4.10** do próximo capítulo utilizaremos a propriedade do operador maximal de Hardy-Littlewood M ser limitado em $L^p(Q)$ para $1 < p \leq \infty$.

A finalidade deste capítulo é justificar porque o **Teorema 4.10** ainda vale se $p = 1$. O truque será definir um operador M_σ (dependendo de M e $\sigma := \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1}$ com $0 < \beta \leq \alpha$) limitado em $L^1(Q)$.

Neste capítulo definiremos e obteremos propriedades de cinco funções maximais biparamétricas $f^\sharp_{\alpha,q_o}, f^\flat_{\alpha,q_o}, F^\sharp_{\alpha,q}, F^\flat_{\alpha,q}, F_{j,q}$, o operador maximal de Calderón N^α_q e as derivadas de Peano $D_\nu f$; onde $f \in L^{q_0}_{loc}(\Omega)$ ou $L^q_{loc}(\Omega)$ conforme o caso, $j \in N$, $\alpha > 0$, $1 \leq q_0 \leq \infty$, $0 < q < \infty$ e ν é um multi-índice.

O resultado principal deste capítulo é mostrar que podemos substituir $f^\sharp_\alpha$ e $f^\flat_\alpha$ por $F^\sharp_{\alpha,q}, F^\flat_{\alpha,q}$, respectivamente, nas definições de C^α_p e C^α_p quando $q \leq p$ e $1 \leq p \leq \infty$.

Finalizamos este capítulo apresentando duas aplicações:

i) equivalência entre $F^\flat_{\alpha,q}$ e N^α_q via derivadas de Peano.

ii) um resultado tipo diferenciação de Lebesgue quando Ω é um cubo e $q < 1$.

Um lembrete: ao longo deste capítulo o número real α será estritamente positivo. Isto implicará na convergência de uma série geométrica.

3.1 Aproximantes

A aproximação por polinômios provém de dois resultados básicos, conforme Davis [1]. O primeiro resultado garante a existência e a unicidade de um polinômio de grau $k+1$ passando por k pontos distintos. É o *problema de aproximação finita.* O segundo resultado diz que toda função contínua definida em um conjunto compacto pode ser aproximado uniformemente por uma seqüência de polinômios. É o conteúdo do *teorema de aproximação de Weierstrass* de 1885[41] .

[41] Existem artigos relacionados a este parágrafo que podem interessar ao leitor. Henri [1] apresenta questões de S.Berstein (1931) e P.Erdös (1947) respondidas afirmativamentes por T.Kilgore (1978) e C.deBoor e A.Pinkus (1978). Para a demonstração clássica do Teorema de Weierstrass sugerimos Davis [1] ou Cheney [1] e para provas alternativas sugerimos Lindsey [1] e Levasseur [1].

P.L. Tchebyshev, em 1853, já estudava a existência, no espaço de polinômios de grau menor ou igual a k, de elementos satisfazendo condições de proximidade que veremos nesta seção. É o problema da melhor aproximação de uma função por polinômios e pode ser implementado para cálculo computacional; a condição de proximidade é o critério de parada ou erro.

3.1.1 Aproximantes em Espaços Normados

Seja X um espaço linear normado com a distância induzida pela norma, isto é, $d(x,y) := \|x-y\|_X$, onde x e y são elementos de X. Seja X_0 um subespaço de X e $f \in X$. O problema da melhor aproximação de f (por elementos de X_0) consiste em determinar $f_0 \in X_0$ tal que

$$\|f - f_0\|_X = \inf_{g \in X_0} \|f - g\|_X .$$

O elemento f_0 é denominado *melhor aproximante*[42] de f em X_0.

Denotamos por $\mathcal{A}_{X_0}(f)$, ou simplesmente $\mathcal{A}(f)$[43] quando X_0 for subentendido, o conjuntos de todos os melhores aproximantes de f por elementos de X_0, isto é,

$$\mathcal{A}_{X_0}(f) := \{f_0 \in X_0 : \|f - f_0\|_X = \inf_{g \in X_0} \|f - g\|_X\} .$$

As caracterizações dos elementos de $\mathcal{A}_{X_0}(f)$ podem ser vistas em Singer [1].

Em particular, se X_0 não é um subespaço fechado (em relação a X), tem-se

$$\mathcal{A}_{X_0}(f) = \begin{cases} \{\, f \,\} & \text{para} \quad f \in X_0 \\ \{\, \emptyset \,\} & \text{para} \quad f \in \overline{X_0} \setminus X_0 \\ \{\, ? \,\} & \text{para} \quad f \in X \setminus \overline{X_0} \end{cases}$$

Trataremos da existência de elementos no conjunto $\{\, ? \,\}$, que pode ser vazio ou não, quando $f \in X \setminus \overline{X_0}$. Se $\{\, ? \,\}$ é não vazio para todo $X \setminus \overline{X_0}$ dizemos que X_0 é *subespaço linear proximinal* [44] de X, ou simplesmente, *proximinal.* Caso contrário, X_0 é dito *não-proximinal.* Assim, a questão da existência dos melhores aproximantes está relacionado com a determinação dos subconjuntos proximinais.

P_k é proximinal em relação a $L^p(R^n)$ e também em relação a $L^p_{loc}(R^n)$ para $1 \leq p \leq \infty$. É conseqüência do

Teorema 3.1 . *Seja X em espaço linear normado e X_0 um subespaço linear de dimensão finita. Então X_0 é proximinal.*

Demonstração . Singer [1] ou Cheney [1]. ■

Outras condições necessárias e suficientes para que X_0 seja proximinal são dadas em Singer [1] bem como quando $f_0 \in X_0$ é o único elemento de melhor aproximação de $f \in X \setminus \overline{X_0}$;sugerimos também Cheney [1].

Por outro lado, $L^p(R^n)$ não é um espaço normado para todo $0 < p < \infty$. Mesmo assim, P_k é proximinal em relação a $L^p(R^n)$ onde $0 < p < \infty$. Este é o objetivo da próxima subseção.

---

[42] Este termo foi introduzido por P.L.Tchebyshev em 1853. O problema básico na teoria da interpolação é a existência de melhores aproximantes.

[43] O conjunto $\mathcal{A}(f)$ é convexo e $\mathcal{A}(f)$ consiste de um único elemento ou possui infinitos elementos, conforme Davis [1].

[44] O termo *proximinal* é a combinação das palavras *proximidade* e *minimal* proposto por R.Killgrove, conforme Singer [1].

3.1.2 Aproximantes em Espaços Métricos

Sejam Y um espaço métrico com métrica d e Y_0 um subconjunto de Y. O problema da melhor aproximação de f em Y por elementos de Y_0 é encontrar um elemento $f_0 \in Y_0$ satisfazendo

$$d(f, f_0) := \inf_{g \in Y_0} d(f, g).$$

Valem as definições análogas para o conjunto $\mathcal{A}_{Y_0}(f)$ e o conjunto proximinal, dadas anteriormente para espaços normados na subseção anterior.

DeVore-Sharpley [1] afirma o seguinte fato: *P_k é proximinal em relação a $L^p(R^n)$ onde* $0 < p < 1$.

3.2 Função Maximal em $L^q_{loc}(\Omega)$, $0 < q < \infty$

Da inclusão $L^q_{loc}(\Omega) \subseteq L^1_{loc}(\Omega)$ para $1 \leq q < \infty$ segue a boa definição dos polinômios $P_Q f$ e $P^\flat_Q f$ quando f é um elemento de $L^q_{loc}(\Omega)$ e $\alpha > 0$. Os polinômios $P_Q f$ e $P^\flat_Q f$ foram apresentados no **Capítulo 2**. Assim, definimos as *funções maximais*

$$\begin{cases} f^\sharp_{\alpha,q,\Omega}(x) := f^\sharp_{\alpha,q}(x) := \sup\limits_{\Omega \supset Q \ni x} \dfrac{1}{|Q|^{\alpha/n}} \left(\dfrac{1}{|Q|} \displaystyle\int_Q |f - P_Q f|^q \right)^{1/q} \\ \\ f^\flat_{\alpha,q,\Omega}(x) := f^\flat_{\alpha,q}(x) := \sup\limits_{\Omega \supset Q \ni x} \dfrac{1}{|Q|^{\alpha/n}} \left(\dfrac{1}{|Q|} \displaystyle\int_Q |f - P^\flat_Q f|^q \right)^{1/q} \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $\alpha > 0$, $1 \leq q < \infty$ e o supremo é tomado sobre todos os cubos Q com $x \in Q \subset \Omega$.

Em particular, $f^\sharp_{\alpha,1} = f^\sharp_\alpha$ e $f^\flat_{\alpha,1} = f^\flat_\alpha$. Logo, as funções $f^\sharp_{\alpha,q}$ e $f^\flat_{\alpha,q}$ podem ser consideradas como uma extensão das funções $f^\sharp_\alpha$ e $f^\flat_\alpha$, respectivamente.

Vejamos porque (**3.1**) não foi definido para $0 < q < 1$. Seja f uma função em $L^q_{loc}(\Omega)$ onde $0 < q < 1$. Neste caso, $P_Q f$ pode não estar definido sempre pois existe uma função $f \in L^q(Q)$ mas $f \notin L^1(Q)$, onde Q é um cubo qualquer de R^n. De fato, por exemplo, a função de uma variável real $f(x) = 1/x$ para $0 < x < 1$ e zero caso contrário, não é integrável em intervalos contendo a origem. Portanto, é impossível, simplesmente utilizando os polinômios $P_Q f$ e $P^\flat_Q f$, estender $f^\sharp_{\alpha,q}$ e $f^\flat_{\alpha,q}$, dadas em (**3.1**) , para toda função $L^q_{loc}(\Omega)$ onde $0 < q < 1$.

Alternativamente, é possível obter funções maximais $F^\sharp_{\alpha,q}$ e $F^\flat_{\alpha,q}$ (a serem definidas abaixo) equivalentes a $f^\sharp_{\alpha,q}$ e $f^\flat_{\alpha,q}$, respectivamente, para $L^q_{loc}(\Omega)$ onde $1 \leq q < \infty$.

Além disso, $F^\sharp_{\alpha,q}$ e $F^\flat_{\alpha,q}$ fazem sentido quando $L^q_{loc}(\Omega)$ onde $0 < q < 1$.

A finalidade desta seção é apresentar $F^\sharp_{\alpha,q}$ e $F^\flat_{\alpha,q}$ e obter algumas propriedades.

Sejam $\alpha > 0$ e $f \in L^q_{loc}(\Omega)$ onde $0 < q < \infty$. Conforme a **seção 3.1**, a função f tem um conjunto de *melhores aproximantes* de $P_{[\alpha]}$ em $L^q_{loc}(\Omega)$, denotada por $\mathcal{A}(f)$[45].

Seja $\mathcal{P}_Q f$ em elemento de $\mathcal{A}(f)$. Definimos a *função maximal*[46]

$$\begin{aligned} F^\sharp_{\alpha,q,\Omega}(x) := F^\sharp_{\alpha,q}(x) &:= \sup_{\Omega \supset Q \ni x} \frac{1}{|Q|^{\alpha/n}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f - \mathcal{P}_Q f|^q \right)^{1/q} \\ &= \sup_{\Omega \supset Q \ni x} \inf_{\pi \in P_{[\alpha]}} \frac{1}{|Q|^{\alpha/n}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f - \pi|^q \right)^{1/q}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

[45] Se $1 < q < \infty$ o conjunto $\mathcal{A}(f)$ contém um único elemento, conforme Davis [1].

[46] Estas funções são generalizadas em Strömberg-Torchinsky [1].

Em (**3.2**) utilizamos o fato de que o polinômio $\mathcal{P}_Q f$ satisfaz $\|f-\mathcal{P}_Q f\|_{L^q(Q)} = \inf_{\pi\in P_{[\alpha]}} \|f-\pi\|_{L^q(Q)}$. Donde conclui-se que $F^\sharp_{\alpha,q}$ independe da escolha de $\mathcal{P}_Q f$.

Quando Ω for igual a um cubo fixo de R^n, digamos $\Omega = Q$, então alteramos $F^\sharp_{\alpha,q,\Omega}(x)$ para $F^\sharp_{\alpha,q,Q}(x)$ onde o supremo utilizado em (**3.2**) será tomado sobre todos os cubos $\tilde{Q}$ satisfazendo $x\in\tilde{Q}\subset Q$.

Relacionaremos $F^\sharp_{\alpha,1}$ e $f^\sharp_\alpha$ para toda função f em $L^1_{loc}(\Omega)$. Relendo o **Lema 2.2** item $i)$, $F^\sharp_{\alpha,1}$ é equivalente a $f^\sharp_\alpha$, isto é, existe uma constante c_1 (dependendo de n e do grau k) tal que

$$c_1 f^\sharp_\alpha(x) \le F^\sharp_{\alpha,1}(x) \le f^\sharp_\alpha(x) \quad \text{para todo } x\in\Omega. \tag{3.3}$$

Por definição de $\mathcal{P}_Q f$ e o fato de $P_Q f$ ser um elemento de $P_{[\alpha]}$ seguem

$$\|f-\mathcal{P}_Q f\|_{L^q(Q)} = \inf_{\pi\in P_{[\alpha]}} \|f-\pi\|_{L^q(Q)} \le \|f-P_Q f\|_{L^q(Q)}.$$

Dividindo esta relação por $|Q|^{\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{q}}$ e tomando o supremo sobre cubos Q com $x\in Q\subset\Omega$, temos

$$F^\sharp_{\alpha,q}(x) \le f^\sharp_{\alpha,q}(x) \quad \text{para todo } x\in\Omega. \tag{3.4}$$

Iremos obter a desigualdade reversa de (**3.4**) quando $q\ge 1$.

Seja $q\ge 1$ (esta é justamente uma condição para que $P_Q f$ e $\mathcal{P}_Q f$ estejam simultaneamente bem definidas para f em $L^q_{loc}(\Omega)$). Estimaremos a norma em $L^q(Q)$ da diferença $\mathcal{P}_Q f - P_Q f$ utilizando a **Proposição 2.1** item $i)$ com constante c_0 (dependendo de n e do grau k), a linearidade do operador projeção $P_Q f$ e a *desigualdade de Hölder* do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{P}_Q f - P_Q f\|_{L^q(Q)} &\le |Q|^{1/q}\|\mathcal{P}_Q f - P_Q f\|_{L^\infty(Q)} = |Q|^{1/q}\|P_Q(\mathcal{P}_Q f - f)\|_{L^\infty(Q)} \\
&\le c_0|Q|^{1/q}\frac{1}{|Q|}\int_Q |\mathcal{P}_Q f - f| \le c_0\|\mathcal{P}_Q f - f\|_{L^q(Q)}.
\end{aligned}$$

A relação acima e o item $i)$ do **Teorema 2.1** produzem

$$\begin{aligned}
\|f-P_Q f\|_{L^q(Q)} &\le \|f-\mathcal{P}_Q f\|_{L^q(Q)} + \|\mathcal{P}_Q f - P_Q f\|_{L^q(Q)} \\
&= \|f-\mathcal{P}_Q f\|_{L^q(Q)} + \|P_Q(\mathcal{P}_Q f - f)\|_{L^q(Q)} \\
&\le (1+c_0)\|f-\mathcal{P}_Q f\|_{L^q(Q)}.
\end{aligned}$$

Dividindo a relação acima por $|Q|^{\frac{\alpha}{n}+\frac{1}{q}}$ e tomando o supremo sobre cubos Q com $x\in Q\subset\Omega$, temos

$$f^\sharp_{\alpha,q}(x) \le (1+c_0)F^\sharp_{\alpha,q}(x) \qquad \text{para todo } x\in\Omega. \tag{3.5}$$

Isto mostra a afirmação.

Fazendo $\frac{1}{\sigma} := \frac{\alpha}{n}+\frac{1}{q}$, também podemos reescrever a definição (**3.2**) como sendo

$$F^\sharp_{\alpha,q}(x) = \sup_{\Omega\supset Q\ni x} \frac{1}{|Q|^{1/\sigma}}\|f-\mathcal{P}_Q f\|_{L^q(Q)}. \tag{3.6}$$

Para $\alpha>0$ e $f\in L^q_{loc}(\Omega)$ onde $0<q<\infty$, definimos outra *função maximal*

$$\begin{aligned}
F^\flat_{\alpha,q,\Omega}(x) := F^\flat_{\alpha,q}(x) &:= \sup_{\Omega\supset Q\ni x} \frac{1}{|Q|^{\alpha/n}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f-\mathcal{P}^\flat_Q f|^q\right)^{1/q} \\
&= \sup_{\Omega\supset Q\ni x}\inf_{\pi\in P_{(\alpha)}} \frac{1}{|Q|^{\alpha/n}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f-\pi|^q\right)^{1/q}.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

onde o polinômio $\mathcal{P}_Q^\flat$ é um elemento do conjunto $\mathcal{A}^\flat(f)$ dos melhores aproximantes de $P_{(\alpha)}$ em $L^q_{loc}(\Omega)$, além disso, $F^\flat_{\alpha,q}$ independe da escolha de $\mathcal{P}_Q^\flat f$ e vale a segunda igualdade em (**3.7**) pois $\mathcal{P}_Q^\flat f$ satisfaz $\|f - \mathcal{P}_Q^\flat f\|_{L^q(Q)} = \inf_{\pi \in P_{(\alpha)}} \|f - \pi\|_{L^q(Q)}$.

Proposição 3.2 . *Seja $f \in L^q_{loc}(\Omega)$ onde $1 \le q < \infty$ e Ω é todo o R^n ou um cubo de R^n. Então*

$$i) \ \ f^\sharp_{\alpha,q} \text{ e } F^\sharp_{\alpha,q} \text{ são equivalentes} \qquad \text{e} \qquad ii) \ \ f^\flat_{\alpha,q} \text{ e } F^\flat_{\alpha,q} \text{ são equivalentes.}$$

Demonstração. O item $i)$ segue de (**3.4**) e (**3.5**). O item $ii)$ segue a partir dos análogos a (**3.4**) e (**3.5**) para $F^\flat_{\alpha,q}$. ■

As funções maximais $F^\sharp_{\alpha,q}$ e $F^\flat_{\alpha,q}$ dependem dos parâmetros α e q. Relacionaremos $F^\sharp_{\alpha,q}$ e $F^\flat_{\alpha,q}$. Sejam $\alpha > 0$ e $0 < q < \infty$. Sendo $P_{(\alpha)} \subset P_{[\alpha]}$, pela segunda igualdade em (**3.2**) e pela segunda igualdade em (**3.7**) segue

$$F^\sharp_{\alpha,q}(x) \le F^\flat_{\alpha,q}(x) \quad \text{para todo } x \text{ em } \Omega. \tag{3.8}$$

Sugerimos comparar (**3.8**) com o **Corolário 2.3**.

Vamos relacionar $F^\sharp_{\alpha,q}$ e $F^\flat_{\alpha,q}$ para diferentes valores de q, fixado α. Apresentaremos duas desigualdades; uma direta e a outra reversa. Vejamos a desigualdade direta.

Seja $\alpha > 0$ fixo. Se $0 < q \le r < \infty$ então

$$i) \ \ F^\sharp_{\alpha,q}(x) \le F^\sharp_{\alpha,r}(x) \qquad \text{e} \qquad ii) \ \ F^\flat_{\alpha,q}(x) \le F^\flat_{\alpha,r}(x) \quad \text{para todo } x \text{ em } \Omega. \tag{3.9}$$

De fato, provaremos $i)$. De maneira análoga segue $ii)$.

Fixemos um polinômio $\pi \in P_{[\alpha]}$. Se $q = r$ nada temos para provar.

Se $q < r$ então $\frac{q}{r} < 1$. Definimos o número real $\frac{1}{\beta} := 1 - \frac{q}{r} > 0$. Aplicamos a *desigualdade de Hölder* com expoentes conjugados $\frac{r}{q} > 1$ e β às funções $|f - \mathcal{P}_Q f|^q$ e 1, respectivamente, para obter

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f - \mathcal{P}_Q f|^q.1 \le \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f - \mathcal{P}_Q f|^r\right)^{q/r}.$$

Extraindo a raiz q-ésima da relação acima, dividindo por $|Q|^{\alpha/n}$ e a seguir tomando o supremo sobre os cubos Q com $x \in Q \subset \Omega$ obtemos $i)$.

A desigualdade reversa de (**3.9**) está no seguinte

Teorema 3.3 . *Sejam $\alpha > 0$, $0 < q \le r < \infty$ e $f \in L^q_{loc}(\Omega)$ onde $\Omega = R^n$ ou um cubo de R^n. Existem constantes c_1 e $c_2 > 0$ dependendo de n, q e $k = [\alpha]$ ou (α), conforme o caso, tais que*

$$i) \ \ F^\sharp_{\alpha,r}(x) \le c_1 M_\sigma(F^\sharp_{\alpha,q})(x) \qquad \text{e} \qquad ii) \ \ F^\flat_{\alpha,r}(x) \le c_2 M_\sigma(F^\flat_{\alpha,q})(x)$$

para todo x em Ω, com $\sigma := \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{1}{r}\right)^{-1}$ e $M_\sigma(g) := [M(|g|^\sigma)]^{1/\sigma}$ onde M é o operador maximal de Hardy-Littlewood (para Ω) definido na **seção 1.6**.[47]

Antes de demonstrar o **Teorema 3.3** vejamos uma conseqüência desse teorema.

Os resultados apresentados até o presente momento nesta seção fornecem (**3.10**) e (**3.11**) descritos abaixo.

[47]Fixado $r > 0$, o número $\sigma := \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{1}{r}\right)^{-1}$ é chamado *índice crítico* e á o menor valor de σ tal que vale a implicação $F^\sharp_{\alpha,q} \in L^\sigma(\Omega) \implies f \in L^r_{loc}(\Omega)$. Isto está provado em DeVore-Sharpley [1].

Se $1 \leq q \leq p$ fazemos $\sigma := \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{1}{r}\right)^{-1}$. Por (**3.3**) com constante c_0, (**3.9**), **Teorema 3.3** item i) e M_σ aplicado a (**3.3**), seguem sucessivamente

$$c_0 f^\sharp_\alpha(x) \leq F^\sharp_{\alpha,1}(x) \leq F^\sharp_{\alpha,q}(x) \leq c_1 M_\sigma(F^\sharp_{\alpha,1})(x) \leq c_1 M_\sigma(f^\sharp_\alpha)(x) \quad \text{quase sempre.} \tag{3.10}$$

Se $0 < q < 1 \leq p$ fazemos $\sigma_0 := \left(\frac{\alpha}{n} + 1\right)^{-1}$. Por (**3.9**), (**3.3**), **Teorema 3.3** item i), seguem sucessivamente

$$F^\sharp_{\alpha,q}(x) \leq F^\sharp_{\alpha,1}(x) \leq f^\sharp_\alpha(x) \leq c_0 F^\sharp_{\alpha,1}(x) \leq c_0 c_1 M_{\sigma_0}(F^\sharp_{\alpha,q})(x) \quad \text{quase sempre.} \tag{3.11}$$

Agora estamos em condições de entender melhor a definição de $C^\alpha_p(\Omega)$ e $\mathcal{C}^\alpha_p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$ dadas por (**!2.26**). A **Proposição 3.4** a seguir diz que nas definições de $C^\alpha_p(\Omega)$ e $\mathcal{C}^\alpha_p(\Omega)$ podemos substituir $f^\sharp_\alpha$ e $f^\flat_\alpha$ pr $F^\sharp_{\alpha,q}$ e $F^\flat_{\alpha,q}$, respectivamente, quando $q \leq p < \infty$.

Proposição 3.4 . *Se $1 \leq p \leq \infty$ e $0 < q < \infty$ então, para todo $q \leq p$,*

$$i) \;\; f^\sharp_\alpha \in L^p(\Omega) \Longleftrightarrow F^\sharp_{\alpha,q} \in L^p(\Omega) \qquad e \qquad ii) \;\; f^\sharp_\alpha \in L^p(\Omega) \Longleftrightarrow F^\sharp_{\alpha,q} \in L^p(\Omega).$$

Demonstração. Mostraremos i). O item ii) segue de modo análogo.

Para mostrar o sentido "$\Longrightarrow$" argumentamos: se $1 \leq q$ utilizamos a limitação em $L^p(\Omega)$ do operador M_σ e (**3.10**); se $q < 1$ utilizamos a primeira e a segunda desigualdades de (**3.10**). No sentido "$\Longleftarrow$" argumentamos: se $1 \leq q$ utilizamos a primeira e a segunda desigualdades em (**3.11**). Se $q < 1$ utilizamos a limitação do operador M_{σ_0} em $L^p(\Omega)$ e (**3.11**). ■

Vejamos uma propriedade importante do operador M_σ definido no **Teorema 3.11.**

O operador M_σ é limitado em $L^1(Q)$. Em geral, mostraremos que M_σ é limitado em $L^p(Q)$ para $p \geq 1$. De fato, se $1 \leq q \leq p$ e $\frac{1}{\sigma} = \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{q}$ então $\frac{p}{q} = \frac{\alpha p}{n} + \frac{p}{q} > 1$. Donde, utilizando a limitação do operador M em $L^{p/\sigma}(Q)$ com constante c, seguem

$$\begin{aligned} \|M_\sigma g\|_{L^p(Q)} &= \|[M(|g|^\sigma)]^{1/\sigma}\|_{L^p(Q)} = \left(\int_Q [M(|g|^\sigma)]^{\frac{1}{\sigma}p}\right)^{\frac{\sigma}{p}\frac{1}{\sigma}} = \|M(|g|^\sigma)\|^{1/\sigma}_{L^{p/\sigma}(Q)} \\ &\leq c\|g^\sigma\|^{1/\sigma}_{L^{p/\sigma}(Q)} = c\left(\int_Q |g^\sigma|^{\frac{p}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{p}\frac{1}{\sigma}} = c\|g\|_{L^p(Q)} \end{aligned} \tag{3.12}$$

Isto demonstra a afirmação.

A prova do **Teorema 3.3** exige em pouco de preparo técnico. Dividimos os pré-requisitos em diversas etapas. Inicialmente faremos quatro estimativas; duas para $\sharp$ e duas para $\flat$. A seguir apresentamos o **Lema 3.5** que é o ponto de partida para a demonstração do **Teorema 3.3.**

Sejam $R^* \subset R$ cubos com o lado de $R^* \leq 2$ lado de R, isto é, $|R| \leq 2^n |R^*|$. O item ii) da **Proposição 1.7** com constante c_0 (dependendo do k, q e n) aplicado ao polinômio $\mathcal{P}_R f - \mathcal{P}_{R^*} f$ é

$$\|\mathcal{P}_R f - \mathcal{P}_{R^*} f\|_{L^\infty(R^*)} \leq c_0 \left(\frac{1}{|R^*|}\int_{R^*} |\mathcal{P}_R f - \mathcal{P}_{R^*} f|^q\right)^{1/q}.$$

Elevando a desigualdade acima à potência q, e aplicando a desigualdade $(u+v)^q \leq (2^q(u^q + v^q)$

para todo u, v e $q > 0$, visto na **seção 1.1**, seguem

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{P}_R f - \mathcal{P}_{R^*} f\|^q_{L^\infty(R^*)} &\leq c_0^q 2^q \left(\frac{1}{|R^*|} \int_{R^*} |f - \mathcal{P}_R f|^q + \frac{1}{|R^*|} \int_{R^*} |f - \mathcal{P}_{R^*} f|^q \right) \\
&\leq (c_0 2)^q \left(\frac{2^n}{|R|} \int_R |f - \mathcal{P}_R f|^q + \frac{1}{|R^*|} \int_{R^*} |f - \mathcal{P}_{R^*} f|^q \right) \\
&\leq (c_0 2)^q [2^n |R|^{\frac{\alpha}{n} q} F^\sharp_{\alpha,q}(u)^q + |R^*|^{\frac{\alpha}{n} q} F^\sharp_{\alpha,q}(u)^q] \\
&\leq (c_0 2)^q (2^{n+\alpha q} + 1) |R^*|^{\frac{\alpha}{n} q} F^\sharp_{\alpha,q}(u)^q
\end{aligned}$$

para todo $u \in R^* \subset R$.

Extraindo a q-ésima raiz da relação acima e tomando o ínfimo em R^*, segue a primeira desigualdade para $\sharp$, a saber,

$$\|\mathcal{P}_R f - \mathcal{P}_{R^*} f\|_{L^\infty(R^*)} \leq c|R^*|^{\alpha/n} \inf_{u \in R^*} F^\sharp_{\alpha,q}(u) \tag{3.13}$$

onde a constante c (dependendo de k, q e n) vale $2c_0(2^{n+\alpha q} + 1)^{1/q}$. Sugerimos comparar (**3.13**) com (**2.48**).

Vejamos uma segunda estimativa para $\sharp$. Suponhamos uma função em $L^q_{loc}(\Omega)$ onde $0 < q < \infty$. Pelo **Teorema 3.11** dado na **subseção 3.3.4** adiante, tem-se

$$\lim_{Q \downarrow \{x\}} \mathcal{P}_Q f(x) = f(x) \quad \text{para quase todo ponto } x \text{ de } \Omega. \tag{3.14}$$

Seja x um ponto de Ω satisfazendo (**3.14**). Para um cubo qualquer Q contendo x, escolhemos uma seqüência infinita de cubos encaixantes decrescentes satisfazendo $Q =: Q_1 \supset Q_2 \supset \cdots \supset Q_j \supset Q_{j+1} \cdots$ de lado $Q_{j+1} = \frac{1}{2}$ lado Q_j com $x \in Q_j$ para todo $j = 1, 2, \cdots$. Logo, $|Q_{j+1}| = 2^{jn}|Q|$.

Assim, (**3.14**) aplicado à seqüência $\{Q_j : j \in N\}$ do parágrafo anterior produz

$$\lim_{j \to \infty} \mathcal{P}_{Q_j} f(x) = f(x) \quad \text{para quase todo ponto } x \text{ de } \Omega. \tag{3.15}$$

Esta igualdade e (**3.13**) com constante c_1 acarretam, para quase todo x de Ω,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{P}_Q f(x) - f(x)| &= \lim_{j \to \infty} |\mathcal{P}_Q f(x) - \mathcal{P}_{Q_j}| \leq \lim_{j \to \infty} \sum_{i=1}^{j-1} |\mathcal{P}_{Q_i} f(x) - \mathcal{P}_{Q_{i+1}} f(x)| \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} |\mathcal{P}_{Q_j} f(x) - \mathcal{P}_{Q_{j+1}} f(x)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|\mathcal{P}_{Q_j} f - \mathcal{P}_{Q_{j+1}} f\|_{L^\infty(Q_{j+1})} \\
&\leq c_1 \sum_{j=1}^{\infty} \left(|Q_{j+1}|^{\alpha/n} \inf_{u \in Q_{j+1}} F^\sharp_{\alpha,q}(u) \right) \leq c_1 \inf_{u \in Q} F^\sharp_{\alpha,q}(u) \sum_{i=1}^{\infty} |Q_{j+1}|^{\alpha/n} \\
&\leq c_1 F^\sharp_{\alpha,q}(x) |Q|^{\alpha/n} \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-\alpha j}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Em (**3.16**), a série geométrica $\sum_{j=1}^\infty \left(\frac{1}{2^\alpha}\right)^j$ de razão $\frac{1}{2^\alpha} < 1$ é convergente e converge para $\frac{2^{-\alpha}}{1-2^{-\alpha}}$ pois $\alpha > 0$. Este é o motivo porque tomamos $\alpha > 0$ desde o início deste capítulo. Vale a pena comparar esta série geométrica com a série geométrica dada na demonstração do **Lema 2.7**.

Segue de (**3.16**) a segunda estimativa para $\sharp$, onde $c := c_1 \frac{2^{-\alpha}}{1-2^{-\alpha}}$ (a constante c dependendo de $k = [\alpha]$, q e n) e $\alpha > 0$:

$$|\mathcal{P}_Q f(x) - f(x)| \leq c|Q|^{\alpha/n} F^{\sharp}_{\alpha,q}(x) \quad \text{para quase todo ponto } x \text{ de } \Omega. \tag{3.17}$$

O que fizemos para $\sharp$ pode ser feito para $\flat$ e obter o restante das estimativas similares a (**3.13**) e (**3.17**). Enunciá-la-emos para facilitar referências futuras.

Existem constantes c_1 e $c_2 > 0$ dependendo de n, q e $k = (\alpha)$ tais que

$$\begin{aligned} i)\ & \|\mathcal{P}^{\flat}_R f - \mathcal{P}^{\flat}_{R^*} f\|_{L^\infty(R^*)} \leq c_1 |R^*|^{\alpha/n} \inf_{u \in R^*} F^{\flat}_{\alpha,q}(u) \\ ii)\ & |\mathcal{P}^{\flat}_Q f(x) - f(x)| \leq c_2 |Q|^{\alpha/n} F^{\flat}_{\alpha,q}(x) \quad \text{para quase todo ponto } x \text{ de } \Omega. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Neste capítulo utilizaremos as definições das funções distribuição, rearranjo não crescente e rearranjo maximal da **seção 1.5** exclusivamente a partir deste momento até o final desta seção.

Lema 3.5 . *Sejam $f \in L^q_{loc}(\Omega)$ onde $\Omega = R^n$ ou um cubo de R^n e $\mathcal{P}_Q f \in \mathcal{A}(f)$ ou $\mathcal{P}^{\flat}_Q f \in \mathcal{A}^{\flat}(f)$, conforme o caso. Para cada cubo $Q \subset \Omega$, existem constantes c_1 e $c_2 > 0$ tais que, para $0 < t \leq |Q|/2^n$, valem*

$$i) \quad [(f - \mathcal{P}_Q f)\chi_Q]^*(t) \leq c_1 \left[t^{\alpha/n} F^{**} + \int_t^{|Q|} F^{**}(s) s^{\alpha/n} \frac{ds}{s} \right]$$

$$ii) \quad \left[(f - \mathcal{P}^{\flat}_Q f)\chi_Q\right]^*(t) \leq c_2 \left[t^{\alpha/n} G^{**} + \int_t^{|Q|} G^{**}(s) s^{\alpha/n} \frac{ds}{s} \right].$$

*Em $i)$ consideramos $F := F^{\sharp}_{\alpha,q,Q}$ onde o índice Q significa que a função $F^{\sharp}_{\alpha,q,\Omega}$ é aquela definida em (**3.2**) substituindo Ω por Q. Em $ii)$ temos $G := F^{\flat}_{\alpha,q,Q}$.*

Demonstração . Verificaremos $i)$. De modo análogo segue $ii)$. Fixado $t > 0$ (neste momento não estamos utilizando a hipótese de t ser limitado superiormente por $|Q|/2^n$; esta cota superior será obtida naturalmente mais adiante), definimos o conjunto auxiliar

$$E := \{x \in Q \,:\, F(x) > F^*(t)\}.$$

Pela **Proposição 1.13** vale $|E| \leq t$.

Também utilizaremos a desigualdade

$$\inf_{u \in Q_j} F(u) \leq F^{**}(|Q_j|). \tag{3.19}$$

De fato, pela **Proposição 1.16**, tem-se

$$|Q_j| \inf_{u \in Q_j} F(u) \leq \int_{Q_j} F(u)\, du \leq \int_0^{|Q_j|} F^*(s)\, ds.$$

Portanto, por (**1.24**) e o fato do cubo Q_j ter volume finito, segue

$$\inf_{u \in Q_j} F(u) \leq \frac{1}{|Q_j|} \int_0^{|Q_j|} F^*(s)\, ds = F^{**}(|Q_j|).$$

Donde obtivemos (**3.19**).

Para $x \in Q \setminus E := \{x \in Q \, : \, F(x) \leq F^*(t)\}$, queremos estimar as duas parcelas do lado direito de

$$|\mathcal{P}_Q f(x) - f(x)| \leq |\mathcal{P}_Q f(x) - \mathcal{P}_{Q_m} f(x)| + |\mathcal{P}_{Q_m} f(x) - f(x)| \tag{3.20}$$

para algum subcubo Q_m de Q onde m é inteiro. Determinaremos m. O fato de x estar fora de E será utilizado para estimar o termo $|\mathcal{P}_{Q_m} f(x) - f(x)|$ de (**3.20**).

Se $x \in Q \setminus E$, escolhemos uma seqüência infinita de cubos encaixantes $Q =: Q_1 \supset Q_2 \supset \cdots \supset Q_j \supset Q_{j+1} \supset \cdots$ com $x \in Q_j$ e lado de $Q_{j+1} = \frac{1}{2}$ lado de Q_j; assim $|Q_{j+1}| = 2^{-jn}|Q|$, onde $j = 1, 2 \cdots$. Alteramos o parâmetro t (fixado no início da demonstração) tal que t também satisfaça $0 < t \leq |Q_2| = |Q|/2^n < |Q|$ (isto é, t possui uma cota superior). Agora podemos escolher m. Seja um número inteiro $m \geq 1$ tal que $|Q_{m+2}| < t \leq |Q_{m+1}|$.

Estimaremos $|\mathcal{P}_Q f(x) - \mathcal{P}_{Q_m} f(x)|$ para todo $x \in Q \setminus E$. Usando (**3.13**) com constante c_0 e (**3.19**) obtemos

$$\begin{aligned}
|\mathcal{P}_Q f(x) - \mathcal{P}_{Q_m} f(x)| &\leq \sum_{j=2}^{m} |\mathcal{P}_{Q_{j-1}} f(x) - \mathcal{P}_{Q_j} f(x)| \leq \sum_{j=2}^{m} \|\mathcal{P}_{Q_{j-1}} f - \mathcal{P}_{Q_j} f\|_{L^\infty(Q_j)} \\
&\leq c_0 \sum_{j=2}^{m} |Q_j|^{\alpha/n} \inf_{u \in Q_j} F(u) \leq c_0 \sum_{j=2}^{m} |Q_j|^{\alpha/n} F^{**}(|Q_j|) \\
&= c_0 \sum_{j=2}^{m} |Q_j|^{\alpha/n} F^{**}(|Q_j|) \frac{|Q_j| - |Q_{j+1}|}{|Q_j| - |Q_{j+1}|} \\
&= c_0 \sum_{j=2}^{m} |Q_j|^{\alpha/n} F^{**}(|Q_j|) \frac{|Q_j| - |Q_{j+1}|}{|Q_j| - \frac{1}{2^n}|Q_j|} \\
&= c_0 \frac{2^n}{2^n - 1} \sum_{j=2}^{m} |Q_j|^{\alpha/n} F^{**}(|Q_j|) \frac{|Q_j| - |Q_{j+1}|}{|Q_j|} \\
&\leq c_0 \frac{2^n}{2^n - 1} \int_t^{|Q|} F^{**}(s) s^{\alpha/n} \frac{ds}{s}.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Na última majoração em (**3.21**) foi substituída a variável discreta $|Q_j|$ por uma variável contínua s. Em (**3.21**) não foi utilizado o fato de $x \notin E$.

Estimaremos $|\mathcal{P}_{Q_m} f(x) - f(x)|$ para todo $x \in Q \setminus E$. Utilizaremos a relação

$$|Q_m| = 2^n |Q_{m+1}| = 2^{2n} |Q_{m+2}| < 2^{2n} t \tag{3.22}$$

resultante da escolha do cubo Q_{m+2}.

Para a seqüência de cubos encaixantes $\{Q_j \, : \, j \in N\}$ satisfazendo $Q_j \downarrow \{x\}$ vale $\lim\limits_{j \to \infty} \mathcal{P}_{Q_j} f(x) = f(x)$ para quase todo ponto $x \in Q \setminus E$ (esta igualdade é um caso particular do **Teorema 3.11** que veremos adiante). Usando (**3.17**) com constante c_1, (**3.22**) e a **Proposição 1.18** item *i*) vem, para quase todo ponto $x \in Q \setminus E$,

$$|\mathcal{P}_{Q_m} f(x) - f(x)| \leq c_1 |Q_m|^{\alpha/n} F(x) \leq c_1 2^{2\alpha} t^{\alpha/n} F^*(t) \leq c_1 2^{2\alpha} t^{\alpha/n} F^{**}(t). \tag{3.23}$$

Observamos que na segunda desigualdade em (**3.23**) foi utilizado a condição de x não ser elemento de E.

Juntando (**3.21**) e (**3.23**) em (**3.20**) segue, para quase todo $x \in Q \setminus E$,

$$|\mathcal{P}_Q f(x) - f(x)| \leq \max\left\{c_0 \frac{2^n}{2^n - 1}, c_1 2^{2\alpha}\right\} \left[t^{\alpha/n} F^{**}(t) + \int_t^{|Q|} F^{**}(s) s^{\alpha/n} \frac{ds}{s}\right]. \tag{3.24}$$

Para simplificar a notação e encerrar esta demonstração fazemos $\Psi := (f - \mathcal{P}_Q f)\chi_Q$ e $\Psi^*(t) := \inf\{\lambda > 0 : \Psi_*(\lambda) \leq t\}$ onde $\Psi_*(\lambda) := |\{x \in R^n : |\Psi(x)| > \lambda\}| = |\{x \in Q : |f(x) - \mathcal{P}_Q f(x)| > \lambda\}|$ para todo $\lambda > 0$. Donde segue que, se existir λ_0 tal que $\Psi_*(\lambda_0) \leq t$ então $\Psi^*(t) \leq \lambda_0$. Afirmamos que existe tal λ_0 e vale

$$\lambda_0 := \max\left\{c_0 , \frac{2^n}{2^n - 1}, c_1 2^{2\alpha}\right\} \left[t^{\alpha/n} F^{**}(t) + \int_t^{|Q|} F^{**}(s) s^{\alpha/n} \frac{ds}{s}\right].$$

(Logo, vale $i)$ e a demonstração do lema encerra-se por aqui.)

Vejamos a afirmação $\Psi_*(\lambda_0) \leq t$. Por (**3.24**) tem-se $|\{x \in Q \setminus E : |f(x) - \mathcal{P}_Q f(x)| > \lambda_0\}| = 0$ e o fato da escolha da partição de Q como a união disjunta de E e $Q \setminus E$ seguem

$$\Psi_*(\lambda_0) = |\{x \in E : |f(x) - \mathcal{P}_Q f(x)| > \lambda_0\}| + |\{x \in Q \setminus E : |f(x) - \mathcal{P}_Q f(x)| > \lambda_0\}| \leq |E| \leq t. \blacksquare$$

Demonstração do Teorema 3.3 . Mostraremos $i)$. De modo análogo segue $ii)$.

Para não carregar a notação substituímos $[(f - \mathcal{P}_Q)\chi_Q]^*(t)$ por $\psi(t)$ no item $i)$ do **Lema 3.5** com constante c_0 e utilizamos a propriedade $(u+v)^r \leq 2^r(u^r + v^r)$ válida para $0 < r < \infty$ e $u, v \geq 0$ dada na **seção 1.1**, para obter

$$\psi(t)^r \leq 2^r c_0^r \left[\left(\int_t^{|Q|} F^{**}(s) s^{\frac{\alpha}{n} - 1}\, ds\right)^r + \left(t^{\alpha/n} F^{**}(t)\right)^r\right] \quad \text{para todo } 0 < t \leq |Q|/2^n .$$

Integrando esta desigualdade no intervalo $(0, |Q|/2^n]$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^{|Q|/2^n} \psi(t)^r\, dt &\leq 2^r c_0^r \left[\int_0^{|Q|/2^n} \left(\int_t^{|Q|} F^{**}(s) s^{\frac{\alpha}{n}-1}\, ds\right)^r dt + \int_0^{|Q|/2^n} \left(t^{\alpha/n} F^{**}(t)\right)^r dt\right] \\ &= 2^r c_0^r \,[I + II] \end{aligned} \tag{3.25}$$

Estimaremos I aplicando a *desigualdade tipo Hardy* (**Teorema 1.3** item $iii)$) para obter

$$I \leq r^r \int_0^{|Q|} \left(F^{**}(s) s^{\alpha/n}\right)^r ds. \tag{3.26}$$

Lembramos a escolha de t satisfazendo $0 < t < |Q|/2^n < |Q|$ durante a demonstração do **Lema 3.5**. Com isso, adequamos II substituindo a variável muda t por s e estendendo o intervalo de integração de $(0\, |Q|/2^n]$ para $(0, |Q|)$. Dessa maneira a integral resultante faz sentido pois é menor ou igual à integral do lado direito em (**3.26**).

Assim, fazendo $\frac{1}{\sigma} := \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{r}$ e juntando os majorantes de I e II obtidos acima em (**3.25**) segue

$$\int_0^{|Q|/2^n} \left(t^{1/r}\psi(t)\right)^r \frac{dt}{t} \leq 2^r c_0^r \max\{r^r, 1\} \int_0^{|Q|} \left(F^{**}(s) s^{1/\sigma}\right)^r \frac{ds}{s}. \tag{3.27}$$

A relação (**3.27**) subsiste sem o termo 2^n do limite superior da primeira integral. Basta mostrar

$$\int_0^{|Q|} \psi^r \leq 2^n \int_0^{|Q|/2^n} \psi^r . \tag{3.28}$$

De fato, a função ψ é não crescente, logo ψ^r é também não crescente.

Portanto,

$$\int_0^{|Q|} \psi^r = \sum_{j=1}^{2^n} \int_{\frac{|Q|}{2^n}(j-1)}^{\frac{|Q|}{2^n} j} \psi^r \leq \sum_{j=1}^{2^n} \int_0^{|Q|/2^n} \psi^r = 2^n \int_0^{|Q|/2^n} \psi^r .$$

Isto prova (**3.28**).

Agora, (**3.28**) e (**3.27**) implicam

$$\int_0^{|Q|}\left(t^{1/r}\psi(t)\right)^r\frac{dt}{t}\leq 2^n2^rc_0^r\max\{r^r,1\}\int_0^{|Q|}\left(F^{**}(s)s^{1/\sigma}\right)^r\frac{ds}{s}=c_1\int_0^{|Q|}\left(F^{**}(s)s^{1/\sigma}\right)^r\frac{ds}{s}.$$

onde $c_1:=2^n2^rc_0^r\max\{r^r,1\}$. A notação da **subseção 1.5.4** permite reescrever a desigualdade acima como sendo

$$\|(f-\mathcal{P}_Qf)\chi_Q\|_{L(r,r)}\leq c_1\|F^\sharp_{\alpha,q,Q}\|_{L(\sigma,r)}. \tag{3.29}$$

Utilizaremos a notação de (**3.6**) e $\sigma<r$ (esta desigualdade segue de $\frac{1}{\sigma}=\frac{\alpha}{n}+\frac{1}{r}<\frac{1}{r}$). Para $x\in Q\subset\Omega$ podemos suprimir χ_Q e o índice Q de $F^\sharp_{\alpha,q,Q}$ em (**3.29**) obtendo

$$\begin{aligned}F^\sharp_{\alpha,r}(x) &= \sup_{\Omega\supset Q\ni x}\frac{1}{|Q|^{1/\sigma}}\|f-\mathcal{P}_Qf\|_{L^r(Q)}\leq c_1\sup_{\Omega\supset Q\ni x}\frac{1}{|Q|^{1/\sigma}}\|F^\sharp_{\alpha,r}\|_{L(\sigma,r)(Q)}\\ &\leq c_1c_2\sup_{\Omega\supset Q\ni x}\frac{1}{|Q|^{1/\sigma}}\|F^\sharp_{\alpha,r}\|_{L^\sigma(Q)}=c_1c_2\sup_{\Omega\supset Q\ni x}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q(F^\sharp_{\alpha,q})^\sigma\right)^{1/\sigma}\\ &= cM_\sigma(F^\sharp_{\alpha,q})(x)\end{aligned}$$

onde a constante c_2 provém das imersões $L^\sigma(Q)=L(\sigma,\sigma)(Q)\hookrightarrow L(\sigma,r)(Q)\hookrightarrow L(r,r)(Q)=L^r(Q)$ (apresentadas na **subseção 1.5.4**); e $c:=c_1c_2$ (a constante c depende de n, q e $k=[\alpha]$ e r pois c_1 e c_2 dependem destes parâmetros). ■

Sejam $0<q<1$ e P_j o espaço dos polinômios de grau $j\in N$. Definimos a *função maximal*

$$F_{j,q,\alpha,\Omega}(x):=F_{j,q}(x):=\sup_{\Omega\supset Q\ni x}\frac{1}{|Q|^{\alpha/n}}\inf_{\pi\in P_j}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q|f-\pi|^q\right)^{1/q}$$

onde supremo é tomado sobre todos os cubos Q com $\Omega\supset Q\ni x$ e o ínfimo é tomado sobre os polinômios em P_j, $\alpha>0$ e Ω é todo o R^n ou um cubo de R^n.

Já vimos que $f^\sharp_{\alpha,q}$ e $F^\sharp_{\alpha,q}$ quando $q\geq 1$ (conforme **Proposição 3.2**). Encerraremos esta seção apresentando uma extensão da **Proposição 3.5** item i para $0<q<1$. Se $j=[\alpha]$ então, por (**3.2**) e pela definição acima, vale a igualdade em $F_{[\alpha],q}=F^\sharp_{\alpha,q}$. Se $j>[\alpha]$ temos a

Proposição 3.6 . *Seja $j>[\alpha]$. Existe uma constante $c>0$ dependendo somente de α, j, q e n tal que para cada $f\in L^q(R^n)+L^\infty(R^n)$ vale*

$$F_{j,q}(x)\leq F^\sharp_{\alpha,q}(x)\leq cF_{j,q}(x)\quad \textit{para todo } x\in R^n.$$

Demonstração. A prova desta proposição é semelhante à da **Proposição 4.4**; serão necessários algumas modificações pois estamos considerando $q<1$. Os detalhes desta prova estão em DeVore-Sharpley [1]. ■

Na próxima seção utilizaremos somente a função $F^\flat_{\alpha,q}$ e suas propriedades.

3.3 Aplicações

3.3.1 Operador Maximal de A. P. Calderón

Fixamos dois parâmetros $\alpha>0$ e $q>0$. Para toda função $f\in L^q_{loc}(\Omega)$, onde $\Omega=R^n$ ou um cubo de R^n, definimos a *função maximal de Calderón*

$$N_q^\alpha f(x):=\sup_{\Omega\supset Q\ni x}\frac{1}{|Q|^{\alpha/n}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q|f-\pi_x|^q\right)^{1/q} \tag{3.30}$$

se existe um polinômio $\pi_x(y) := \sum_{|\nu|\leq(\alpha)} c_\nu(y-x)^\nu$ de grau menor que α (isto é, $\pi_x \in P_{(\alpha)}$) tal que (**3.30**) é finito; caso contrário, $N_q^\alpha f(x) := \infty$[48] .

Observamos que o polinômio π_x que está subentendido em (**3.31**) independe do cubo Q mas o polinômio $\mathcal{P}_Q^b f$ em (**3.7**) varia com Q.

Comparando (**3.2**) e (**3.30**) segue

$$F_{\alpha,q}^b(x) \leq N_q^\alpha f(x). \tag{3.31}$$

Na definição (**3.30**) a função $N_q^\alpha f(x)$ depende de um polinômio $\pi_x \in P_{(\alpha)}$. Por outro lado, a função $F_{\alpha,q}^b(x)$ também depende de um polinômio $\mathcal{P}_Q^b f \in P_{(\alpha)}$ dependendo de f. Queremos mostrar a equivalência entre N_q^α e $F_{\alpha,q}^b$ via derivadas de Peano, isto é, a desigualdade reversa de (**3.31**) será dada no **Teorema 3.10** adiante. A derivada de Peano será apresentada na próxima subseção.

Mostraremos que $N_q^\alpha f(x)$ está bem definido.

Lema 3.7 . *Seja $0 < q < \infty$. Se existe um polinômio π_x de grau menor que α com*

$$\sup_{\Omega\supset Q\ni x} \frac{1}{|Q|^{\alpha/n}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f - \pi_x|^q \right)^{1/q} < \infty$$

então π_x é único.

Demonstração . Sejam π_1 e π_2 dois polinômios em x de $P_{(\alpha)}$ com

$$\sup_{\Omega\supset Q\ni x} \frac{1}{|Q|^{\alpha/n}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f - \pi_j|^q \right)^{1/q} =: c_j < \infty \quad \text{para } j = 1, 2.$$

Fixados x e um cubo Q com $x \in Q$, temos que o polinômio $\pi(y) := \pi_1(y) - \pi_2(y) = \sum_{|\nu|\leq(\alpha)} c_\nu(y-x)^\nu$ com coeficientes c_ν dependendo dos coeficientes de $\pi_1(y)$ e $\pi_2(y)$ satisfaz a seguinte desigualdade visto na **seção 1.1**: $|\pi(y)|^q \leq 2^q(|\pi_1(y)|^q + |\pi_2(y)|^q)$ para todo $y \in Q$ e $0 < q < \infty$. Integrando esta desigualdade sobre Q e a seguir dividindo pelo volume de Q seguem

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |\pi|^q \leq 2^q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\pi_1|^q + \frac{1}{|Q|}\int_Q |\pi_2|^q \right) \leq 2^q(c_1^q + c_2^q)|Q|^{\frac{\alpha}{n}q} \leq 2^q 2(c_1+c_2)^q |Q|^{\frac{\alpha}{n}q}$$

para todo cubo Q com $x \in Q \subset \Omega$. (A última desigualdade provém do fato de c_1 e c_2 serem $\leq c_1 + c_2$.)

Extraindo a raiz q-ésima da desigualdade acima segue

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\pi|^q \right)^q \leq 2^{1+\frac{1}{q}}(c_1+c_2)|Q|^{\alpha/n}.$$

O item i) da **Proposição 1.9** com $k = (\alpha)$ e constante c_0 juntamente com a desigualdade acima fornecem

$$\sum_{|\nu|\leq(\alpha)} |c_\nu||Q|^{|\nu|/n} \leq c_0 \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\pi|^q \right)^q \leq c|Q|^{\alpha/n}$$

para todo cubo Q com $x \in Q \subset \Omega$ e onde a constante c vale $2^{1+\frac{1}{q}}c_0(c_1+c_2)$.

[48] A. P. Calderón [2] definiu (**3.30**) em termos de supremos sobre bolas para $q > 1$ em 1972. Mais tarde, Calderón e R. Scott incluíram o caso $q = 1$ em 1978. Originalmente, o operador de Calderón foi introduzido para estudar integrais singulares, diferenciabilidade e imersões em espaços de Sobolev.

Reescrevendo a desigualdade acima temos

$$\sum_{|\nu|\leq(\alpha)} |c_\nu||Q|^{\frac{|\nu|-\alpha}{n}} \leq c.$$

O lado direito desta desigualdade independe do cubo Q; assim, fazendo $|Q|$ tender a zero obtemos $c_\nu = 0$ para cada ν pois o termo $|\nu| - \alpha$ é < 0 e $|Q|^{\frac{|\nu|-\alpha}{n}} \to \infty$.

Donde, $\pi \equiv 0$, isto é, $\pi_1 = \pi_2$. ■

No final da próxima subseção apresentaremos explicitamente o polinômio π_x.

3.3.2 Derivadas de Peano

Definiremos a ν-ésina derivada de Peano de uma função em um ponto.

A fim de reduzir a quantidade de notação, somente nesta e na próxima subseção, empregaremos a notação f_Q com significado diferente aos que foram dadas (**1.9**) e (**2.10**).

Sejam $q > 0$ e $\mathcal{O}$ um conjunto aberto contido em Ω com $x_0 \in \mathcal{O}$ tal que f está em $L^q_{loc}(\mathcal{O})$. Suponhamos, também, a existência de uma seqüência de polinômios $\{\pi_Q : x_0 \in Q \subset \mathcal{O}\}$, de grau $\leq k$, indexados sobre uma família de cubos Q com $x_0 \in Q \subset \mathcal{O}$ satisfazendo

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f-\pi_Q|^q\right)^q \leq O(|Q|^{k/n}),$$

(onde O é o símbolo de Landau e $A = O(B)$ significa que A é dominado por B) isto 'e, existe uma constante finita c onde

$$\frac{1}{|Q|^{k/n}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f-\pi_Q|^q\right)^q \leq c < \infty \quad \text{para todo polinômio } \pi_Q. \tag{3.32}$$

Nestas condições dizemos que $\{\pi_Q : x_0 \in Q \subset \mathcal{O}\}$ é uma *família de polinômios admissíveis para f em x_0*.

Vejamos dois exemplos de família de polinômios admissíveis quando $\mathcal{O}$ for igual a um cubo Q fixo:

i) $\{\mathcal{P}_{Q^*}f : x_0 \in Q^* \subset \mathcal{O}\}$ onde $f \in L^q_{loc}(\Omega)$, grau de $\mathcal{P}_{Q^*}f < \alpha$ e $x_0 \in Q^* \subset \mathcal{O}$ para Q cubo fixo.

De fato, é suficiente verificar (**3.32**). Fixamos o cubo Q. Suponhamos $F^\sharp_{\alpha,q}(x_0)$ finito para algum x_0 de Q. Pela definição (**3.2**), para todo cubo Q^* com $x_0 \in Q^* \subset Q$ vale

$$\frac{1}{|Q^*|^{\alpha/n}}\left(\frac{1}{|Q^*|}\int_{Q^*} |f-\mathcal{P}_{Q^*}f|^q\right)^q \leq F^\sharp_{\alpha,q}(x_0) < \infty. \tag{3.33}$$

Esta relação mostra que a família $\{\mathcal{P}_{Q^*}f : x_0 \in Q^* \subset \mathcal{O}\}$ satisfaz (**3.32**).

Outro exemplo é $\{\mathcal{P}^\flat_{Q^*}f : x_0 \in Q^* \subset \mathcal{O}\}$, nas mesmas condições acima; a demonstração é análoga.

A *ν-ésima derivada de Peano no ponto x_0* é o limite (**3.34**) abaixo, denotada por $D_\nu f(x_0)$.

Seja $\{\pi_Q : x_0 \in Q \subset \mathcal{O}\}$ é uma família de polinômios admissíveis para f em x_0. Se $|\nu| < k$, o limite

$$\lim_{Q\downarrow\{x_0\}} D^\nu \pi_Q(x_0) =: D_\nu f(x_0) \tag{3.34}$$

existe e é finito.

Antes de mostrar a existência e finitude de (**3.34**) verificaremos a boa definição da derivada de Peano, isto é, $D_\nu f(x_0)$ não depende da escolha da vizinhança aberta $\mathcal{O}$, nem da família de polinômios π_Q e nem do parâmetro q.

De fato, o limite em (**3.34**) reflete um comportamento local de $D^\nu \pi_Q(x_0)$ próximo de x_0. Assim, podemos supor que os cubos $Q \downarrow \{x_0\}$ também satisfaçam $|Q| < 1$.

Sejam as famílias de polinômios admissíveis $\{\pi_Q : x_0 \in Q \subset \mathcal{O}\}$ para os parâmetros fixos $\mathcal{O}, q$ e k e $\{\pi_Q : x_0 \in Q \subset \tilde{\mathcal{O}}\}$ para os parâmetros fixos $\tilde{\mathcal{O}}, \tilde{q}$ e $\tilde{k}$. Escolhemos $\mathcal{O}_0 := \mathcal{O} \bigcap \tilde{\mathcal{O}}$, cubos Q contidos em $\mathcal{O}_0$, $q_0 := \min\{q, \tilde{q}\}$ e $k_0 := \min\{k, \tilde{k}\}$.

Pela **Proposição 1.7** item *ii*) com constante c_0, a desigualdade $(u+v)^r \leq 2^r(u^r + v^r)$ onde u, v e r são todos > 0 (dada na **seção 1.1**), a *desigualdade de Hölder* para expoentes conjugados convenientes (análogos aos utilizados para obter (**1.11**), (**3.9**) e (**3.32**) com constantes c_1 e c_2 vem: (A penúltima desigualdade abaixo provém do fato de $|Q| < 1$ e a seguir utilizamos o fato de c_1 e c_2 serem $\leq c_1 + c_2$.)

$$\begin{aligned}
\|\pi_Q - \tilde{\pi}_Q\|^{q_0}_{L^\infty(Q)} &\leq c_0^{q_0} \frac{1}{|Q|} \int_Q |\pi_Q - \tilde{\pi}_Q|^{q_0} \\
&\leq 2^{q_0} c_0^{q_0} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f - \pi_Q|^{q_0} + \frac{1}{|Q|} \int_Q |f - \tilde{\pi}_Q|^{q_0} \right) \\
&\leq 2^{q_0} c_0^{q_0} \left\{ \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f - \pi_Q|^{q} \right)^{q_0/q} + \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f - \tilde{\pi}_Q|^{\tilde{q}} \right)^{q_0/\tilde{q}} \right\} \\
&\leq (2c_0)^{q_0} \left(c_1^{q_0} |Q|^{\frac{kq_0}{n}} + c_2^{q_0} |Q|^{\frac{\tilde{k}q_0}{n}} \right) \\
&\leq (2c_0)^{q_0} (c_1^{q_0} + c_2^{q_0}) |Q|^{\frac{k_0 q_0}{n}} \\
&\leq (2c_0)^{q_0} 2 (c_1 + c_2)^{q_0} |Q|^{\frac{k_0 q_0}{n}}.
\end{aligned}$$

Extraindo a raiz q_0-ésima da relação acima temos

$$\|\pi_Q - \tilde{\pi}_Q\|_{L^\infty(Q)} \leq c_3 |Q|^{\frac{k_0}{n}} \quad \text{onde } c_3 := 2^{1+\frac{1}{q_0}} c_0 (c_1 + c_2).$$

Para $|\nu| < k_0$ e $x_0 \in Q$ (com $|Q| < 1$), a *desigualdade de Markov* (**Proposição 1.6**) com constante c_4 e a desigualdade acima produzem

$$\begin{aligned}
|D^\nu(\pi_Q - \tilde{\pi}_Q)(x_0)| &\leq \|D^\nu(\pi_Q - \tilde{\pi}_Q)\|_{L^\infty(Q)} \\
&\leq c_4 |Q|^{-|\nu|/n} \|\pi_Q - \tilde{\pi}_Q\|_{L^\infty(Q)} \\
&\leq c_3 c_4 |Q|^{\frac{k_0 - |\nu|}{n}}.
\end{aligned}$$

Utilizando a condição $k_0 - |\nu| \neq 0$ e fazendo $Q \downarrow \{x_0\}$ (isto é, $|Q| \downarrow 0$) na relação acima segue

$$\lim_{Q \downarrow \{x_0\}} D^\nu \pi_Q(x_0) = \lim_{Q \downarrow \{x_0\}} D^\nu \tilde{\pi}_Q(x_0).$$

Conclui-se assim a verificação da boa definição da derivada de Peano.

A existência e a finitude de (**3.34**) serão discutidas a seguir.

Quando $x_0 \in Q^* \subset Q \subset \mathcal{O}$ (com $|Q| < 1$) e incluindo a condição extra: lado de $Q \leq 2$ lado de Q^*, isto é, $|Q| \leq 2^n |Q^*|$ temos, pela *desigualdade de Markov* (**Proposição 1.6**) com constante c_0 e a **Proposição 1.7** item *ii*) com constante c_1 o seguinte

$$\begin{aligned}\|D^\nu(\pi_Q - \pi_{Q^*})\|_{L^\infty(Q^*)} &\le c_0|Q^*|^{-|\nu|/n}\|\pi_Q - \pi_{Q^*}\|_{L^\infty(Q^*)}\\ &\le c_0c_1|Q^*|^{-|\nu|/n}\left(\frac{1}{|Q^*|}\int_{Q^*}|\pi_Q - \pi_{Q^*}|^q\right)^{1/q}.\end{aligned}$$

Elevando à potência q a desigualdade acima e utilizando a relação $(u+v)^q \le 2^q(u^q+v^q)$ válida para todo u e $v > 0$ e $0 < q < \infty$ (visto na **seção 1.1**) e $|\nu| < k$, temos

$$\begin{aligned}\|D^\nu(\pi_Q - \pi_{Q^*})\|^q_{L^\infty(Q)} &\le (c_0c_1)^q|Q^*|^{-\frac{|\nu|}{n}q}\left(\frac{1}{|Q^*|}\int_{Q^*}|\pi_Q - f + f - \pi_{Q^*}|^q\right)\\ &\le (c_0c_1)^q|Q^*|^{-\frac{|\nu|}{n}q}2^q\left(\frac{1}{|Q^*|}\int_{Q^*}|f-\pi_Q|^q + \frac{1}{|Q^*|}\int_{Q^*}|f-\pi_{Q^*}|^q\right)\\ &\le (2c_0c_1)^q|Q^*|^{-\frac{|\nu|}{n}q}\left(\frac{2^n}{|Q|}\int_Q|f-\pi_Q|^q + \frac{1}{|Q^*|}\int_{Q^*}|f-\pi_{Q^*}|^q\right)\\ &\le (2c_0c_1)^q|Q^*|^{-\frac{|\nu|}{n}q}\left(2^nc_2^q|Q|^{\frac{k}{n}q} + c_2^q|Q^*|^{\frac{k}{n}q}\right)\\ &\le (2c_0c_1)^q2^{|\nu|q}|Q|^{-\frac{|\nu|}{n}q}(2^nc_2^q|Q|^{\frac{k}{n}q} + c_2^q|Q|^{\frac{k}{n}q})\\ &\le (2c_0c_1)^q2^{kq}(2^nc_2^q + c_2^q)|Q|^{\frac{k-|\nu|}{n}q}\end{aligned}$$

Extraindo a raiz q-ésima da relação acima

$$\|D^\nu(\pi_Q - \pi_{Q^*})\|_{L^\infty(Q)} \le 2^{1+k}c_0c_1c_2(2^n+1)|Q|^{\frac{k-|\nu|}{n}}.$$

No caso geral, para todo cubo Q^* tal que $x_0 \in Q^* \subset Q \subset \mathcal{O}$ (e $|Q| < 1$) usamos o mesmo argumento telescópico dado na demonstração do **Lema 2.7** para obter

$$\|D^\nu(\pi_Q - \pi_{Q^*})\|_{L^\infty(Q)} \le c|Q|^{\frac{k-|\nu|}{n}}$$

onde a constante c depende de n e k. É neste caso geral que usamos fortemente a hipótese $|\nu| < k$ ao obter uma progressãogeométrica análoga ao do **Lema 2.7**.

Fazendo $Q \downarrow \{x_0\}$ na desigualdade acima verificamos que $\{D^\nu\pi_Q : x_0 \in Q \subset \mathcal{O}\}$ é uma seqüência de Cauchy em $L^\infty(Q)$ e $L^\infty(Q)$ é completo. Isto mostra que (**3.34**) existe.

Em particular, para $|\nu| < \alpha$ e $\{\mathcal{P}_{Q^*}f : x_0 \in Q^* \subset \mathcal{O}\}$ temos, por (**3.33**) e (**3.34**), que o limite

$$\lim_{Q^*\downarrow\{x_0\}} D^\nu\mathcal{P}_{Q^*}f(x) = D_\nu f(x_0)$$

existe e é finito. Mesmo resultado vale para a família $\{\mathcal{P}^\flat_{Q^*}f : x_0 \in Q^* \subset \mathcal{O}\}$. Com isso provamos a

Proposição 3.8 . *A existência da derivada de Peano $D_\nu f(x_0)$ está relacionada com a finitude de $F^\sharp_{\alpha,q}f(x_0)$ ou $F^\flat_{\alpha,q}f(x_0)$.*

Demonstração. ■

Mostraremos uma versão do **Lema 2.7** para $F^{\sharp}_{\alpha,q}$ e $F^{\flat}_{\alpha,q}$. Veremos o caso $F^{\sharp}_{\alpha,q}$. Para $F^{\flat}_{\alpha,q}$ segue de maneira análoga. Usaremos o argumento telescópico da demonstração do **Lema 2.7**.

De fato, sejam $Q^* \subset Q$ dois cubos quaisquer e $|\nu| < \alpha$. Escolhemos uma seqüência finita de cubos encaixantes $Q^* := Q_1 \subset Q_2 \subset \cdots \subset Q_m \subset Q_{m+1} =: Q$ cujo lado de $Q_{i+1} = 2$ lado de Q_i para $1 \le i \le m-1$ e lado de $Q_{m+1} \le 2$ lado de Q_m, isto é $|Q_{i+1}| = 2^n|Q_i|$ para $1 \le i \le m-1$ e $|Q_{m+1}| \le 2^n|Q_m|$.

A mesma seqüência de desigualdades para obter o **Lema 2.7** com uma única modificação no argumento: $\mathcal{P}_Q$ substituindo P_Q, fornece

$$\|D^\nu(\mathcal{P}_Q f - \mathcal{P}_{Q^*} f)\|_{L^\infty(Q^*)} \le c|Q|^{\frac{\alpha-|\nu|}{n}} \inf_{u\in Q^*} F^{\sharp}_{\alpha,q}(u) \le c|Q|^{\frac{\alpha-|\nu|}{n}} F^{\sharp}_{\alpha,q}(x_0).$$

Portanto, da desigualdade acima, seguem

$$\begin{aligned} |D^\nu(\mathcal{P}_Q f)(x_0) - D^\nu(\mathcal{P}_{Q^*} f)(x_0)| &\le \|D^\nu(\mathcal{P}_Q f) - D^\nu(\mathcal{P}_{Q^*} f)\|_{L^\infty(Q^*)} \\ &= \|D^\nu(\mathcal{P}_Q f) - \mathcal{P}_{Q^*} f)\|_{L^\infty(Q^*)} \\ &\le c|Q|^{\frac{\alpha-|\nu|}{n}} F^{\sharp}_{\alpha,q}(x_0). \end{aligned}$$

Esta desigualdade juntamente com a **Proposição 3.8** permite obter o

Lema 3.9 . *Sejam $\alpha > 0$ e $q > 0$. Para $|\nu| < \alpha$ e $f \in L^q_{loc}(\Omega)$ a derivada de Peano $D_\nu f(x_0)$ existe em cada ponto onde $F^{\sharp}_{\alpha,q}(x_0)$ é finito. Além disso, nesse ponto x_0 vale*

$$|D^\nu(\mathcal{P}_Q f)(x_0) - D_\nu f(x_0)| \le cF^{\sharp}_{\alpha,q}(x_0)|Q|^{\frac{\alpha-|\nu|}{n}}.$$

Se $F^{\flat}_{\alpha,q}(x_0)$ é finito, então

$$|D^\nu(\mathcal{P}^{\flat}_Q f)(x_0) - D_\nu f(x_0)| \le cF^{\flat}_{\alpha,q}(x_0)|Q|^{\frac{\alpha-|\nu|}{n}}.$$

Demonstração . ■

A seguir apresentamos a equivalência entre o operador maximal de Calderón e a função maximal $F^{\flat}_{\alpha,q}$.

3.3.3. Equivalência entre $F^{\flat}_{\alpha,q}$ e N^α_q

Teorema 3.10 . *Sejam $\alpha > 0$, $q > 0$ e $f \in L^q_{loc}(\Omega)$. Existe uma constante $c > 0$ tal que*

$$F^{\flat}_{\alpha,q}(x) \le N^\alpha_q(x) \le cF^{\flat}_{\alpha,q}(x) \quad \textit{para todo } x \in \Omega.$$

Demonstração. A primeira desigualdade do teorema é (**3.31**).

Fixemos um cubo Q de lado $|Q|^{1/n}$ com $x \in Q$. Para a segunda desigualdade do teorema podemos supor $F^{\flat}_{\alpha,q}(x)$ finito. Caso contrário tem-se uma estimativa trivial. No caso de $F^{\flat}_{\alpha,q}(x)$ ser finito, pelo **Lema 3.9**, as derivadas de Peano $D_\nu f(x)$ existem para todo multi-índice ν satisfazendo $|\nu| < \alpha$. Assim, em $P_{(\alpha)}$, construímos formalmente o polinômio em y dado por

$$\pi_x(y) := \sum_{|\nu|<\alpha} D_\nu f(x)\frac{(y-x)^\nu}{\nu!}. \tag{3.35}$$

Pelo **Lema 3.9** com constante c_0, (**3.35**), a relação

$$\mathcal{P}^b_Q f(x) = \sum_{|\nu|<\alpha} D^\nu \mathcal{P}^b_Q f(x) \frac{(y-x)^\nu}{\nu!}$$

e observando que $|y-x| \leq$ diâmetro de $Q = n^{1/2}|Q|^{1/n}$ para todo $x, y \in Q$, seguem

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\pi_x - \mathcal{P}^b_Q f|^q\right)^{1/q} &\leq \|\pi_x - \mathcal{P}^b_Q f\|_{L^\infty(Q)} \\
&= \left\| \sum_{|\nu|<\alpha} \left(D_\nu f(x) \frac{(\,.\,-x)^\nu}{\nu!} - D^\nu \mathcal{P}^b_Q f(x) \frac{(\,.\,-x)^\nu}{\nu!} \right) \right\|_{L^\infty(Q)} \\
&\leq \sum_{|\nu|<\alpha} |D_\nu f(x) - D^\nu \mathcal{P}^b_Q f(x)| \left\| \frac{(\,.\,-x)^\nu}{\nu!} \right\|_{L^\infty(Q)} \\
&\leq c_0 \sum_{|\nu|<\alpha} F^b_{\alpha,q}(x) |Q|^{\frac{\alpha-|\nu|}{n}} |Q|^{\frac{|\nu|}{n}} \frac{n^{|\nu|/2}}{\nu!} \\
&\leq c_1 F^b_{\alpha,q}(x)|Q|^{\frac{\alpha}{n}}
\end{aligned}$$

onde $c_1 := c_0 n^{\alpha/2} \sum_{|\nu|<\alpha} \frac{1}{\nu!}$.

A desigualdade acima será utilizado na seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
\int_Q |f-\pi_x|^q &\leq 2^q \left\{ \int_Q |f - \mathcal{P}^b_Q f|^q + \int_Q |\pi_x - \mathcal{P}^b_Q f|^q \right\} \\
&\leq 2^q \left\{ F^b_{\alpha,q}(x)^q |Q|^{\frac{\alpha}{n}q} + c_1^q F^b_{\alpha,q}(x)^q |Q|^{\frac{\alpha}{n}q} \right\} \\
&= 2^q(1+c_1^q) F^b_{\alpha,q}(x)^q |Q|^{\frac{\alpha}{n}q}.
\end{aligned}$$

Extraindo a raiz q-ésima da relação acima, dividindo por $|Q|^{\alpha/n}$ e a seguir tomando o supremo sobre todos os cubos Q tais que $\Omega \supset Q \ni x$ segue

$$N^\alpha_q f(x) = \sup_{\Omega \supset Q \ni x} \frac{1}{|Q|^{\alpha/n}} \left(\int_Q |f-\pi_x|^q \right)^{1/q} \leq 2(1+c_1^q)^{1/q} F^b_{\alpha,q}(x) < \infty.$$

Donde segue a segunda desigualdade do teorema com a constante valendo $c := 2(1+c_1^q)^{1/q}$. ∎

Já vimos em (**3.3**) que $F^b_{\alpha,1}$ é equivalente a f^b_α. Assim, relendo o **Teorema 3.10** verificamos a existência de uma constante $c > 0$ cumprindo

$$f^b_\alpha(x) \leq N^\alpha_1(x) \leq c f^b_\alpha(x) \quad \text{para toda função } f \in L^q_{loc}(\Omega) \text{ e } \alpha > 0. \tag{3.36}$$

Incidentalmente, quando $F^b_{\alpha,q}(x)$ é finito, um argumento utilizado na demonstração do **Teorema 3.10** serve para caracterizar o polinômio π_x dado no **Lema 3.7**.

De fato, nas condições do **Teorema 3.10**, se $F^b_{\alpha,q}(x)$ for finito então $N^\alpha_q f(x)$ também é finito. Portanto o polinômio dado por $\sum_{|\nu|<\alpha} D_\nu f(x) \frac{(y-x)^\nu}{\nu!}$ satisfaz as condições do **Lema 3.7**. A unicidade no **Lema 3.7** garante a igualdade em

$$\pi_x = \sum_{|\nu|<\alpha} D_\nu f(x) \frac{(y-x)^\nu}{\nu!}.$$

3.3.4 Mais um Resultado Tipo Diferenciação de Lebesgue

Apresentamos um resultado análogo ao teorema de diferenciação de Lebesque para $0 < q < 1$.

Consideremos a *função maximal tipo Hardy-Littlewood* definida por

$$\tilde{\mathcal{M}}_Q f(x) := \sup_{\substack{\Omega \supset Q \ni x \\ \pi \in \mathcal{A}(f)}} |\pi(x)|$$

onde o supremo é tomado sobre todos os cubos Q onde $x \in Q \subset \Omega$ e também sobre o conjunto $\mathcal{A}(f)$ dos melhores aproximantes de f e π é um polinômio de grau $\leq [\alpha]$.

Sejam $0 < q < 1$ e $f \in L^q_{loc}(\Omega)$. Mostraremos que

$$\tilde{\mathcal{M}}_Q f(x) \leq c M_q f(x) \quad \text{para todo } x \text{ em } \Omega; \tag{3.37}$$

onde $M_q f := [M(|f|^q)]^{1/q}$ e M representa o operador maximal de Hardy-Littlewood e a constante c dependendo somente de q, α e n.

De fato, se $\pi \in \mathcal{A}(f)$ então

$$\int_Q |f-\pi|^q \leq \int_Q |f-\tilde{\pi}|^q \quad \text{para todo polinômio } \tilde{\pi} \text{ de } P_{[\alpha]}.$$

Em particular, para o polinômio nulo $\tilde{\pi} \equiv 0 \in P_{[\alpha]}$ (pois o grau do polinômio nulo é $-\infty$ por convenção) vale

$$\int_Q |f-\pi|^q \leq \int_Q |f|^q.$$

A desigualdade acima e $(u+v)^r \leq 2^r(u^r+v^r)$ válido para todo u, v e $r \geq 0$ provado na **seção 1.1**, implicam

$$\int_Q |\pi|^q \leq 2^q \left(\int_Q |f-\pi|^q + \int_Q |f|^q \right) \leq 2^{q+1} \int_Q |f|^q.$$

A desigualdade de Gagliardo (isto é, a **Proposição 1.7** com constante c_0) e a desigualdade acima fornecem

$$|\pi(x)| \leq \|\pi\|_{L^\infty(Q)} \leq c_0 \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |\pi|^q|^q \right)^{1/q} \leq c_0 2^{1+\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f| \right)^{1/q} \quad \text{para todo } x \in \Omega.$$

Nesta desigualdade tomamos o supremo sobre todo π de $\mathcal{A}(f)$ a seguir tomamos o supremo sobre todo cubo Q com $x \in Q \subset \Omega$; donde segue (**3.37**) com constante $c := c_0 2^{1+\frac{1}{q}}$.

A desigualdade (**3.37**) mostra que $\tilde{\mathcal{M}}_Q$ é *tipo fraco* (q,q), isto é, $\tilde{\mathcal{M}}_Q$ leva $L^q(\Omega)$ limitadamente no espaço de Lorentz $L^q_*(\Omega)$. Este fato permite provar o

Teorema 3.11 . *Sejam* $0 < q < 1$ *e* $f \in L^q_{loc}(\Omega)$. *Então*

$$\lim_{Q \downarrow \{x\}} \mathcal{P}_Q f(x) = f(x) \quad \textit{para quase todo } x \in \Omega.$$

Mas antes mostraremos o

Lema 3.12 . *Sejam* $0 < q < 1$ *e* $f \in L^q_{loc}(\Omega)$ *. Então*

$$\lim_{Q \downarrow \{x\}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f(x)|^q \, dy \right)^{1/q} = 0 \qquad \textit{quase sempre em } \Omega \, .$$

Demonstração do Lema 3.12 . O limite do lema é um resultado local; podemos assumir $f \in L^q(\Omega)$ em vez de $f \in L^q_{loc}(\Omega)$ pois basta zerar f fora do compacto.

Definimos o operador auxiliar

$$Af(x) := \limsup_{Q \downarrow \{x\}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f(x)|^q \, dy \right)^{1/q} . \tag{3.38}$$

O lema segue se mostrarmos que $Af = 0$ quase sempre.

Afirmamos que

$$|f| \leq M_q f \quad \text{quase sempre.} \tag{3.39}$$

De fato,

$$[M_q f(x)]^q \geq \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|^q \, dy \quad \text{para todo cubo } Q \text{ contendo } x \, .$$

Como $f^q \in L^1(\Omega)$, aplicamos o teorema de Lebesgue clássico (isto é, o **Teorema 1.21**) fazendo $Q \downarrow \{0\}$. Assim, o lado direito da desigualdade acima é $f(x)^q$ quase sempre; o esquerdo, independe do cubo Q . Extraindo a raiz q-ésima segue a a afirmação (**3.39**) .

Por (**3.39**) e a desigualdade $(u+v)^r \leq 2^r(u^r + v^r)$ válido para todo u, v e $r \geq 0$ provada na **seção 1.1** , implicam, para quase todo $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned} Af(x)^q = \limsup_{Q \downarrow \{x\}} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f(x)|^q \, dy &\leq 2^q \limsup_{Q \downarrow \{x\}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|^q \, dy + \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x)|^q \, dy \right) \\ &\leq 2^q \limsup_{Q \downarrow \{x\}} \left([M_q f(x)]^q + |f(x)|^q \right) \\ &\leq 2^q \limsup_{Q \downarrow \{x\}} [M_q f(x)]^q + [M_q f(x)]^q \\ &= 2^{q+1} \, [M_q f(x)]^q \, . \end{aligned}$$

Donde, extraindo a raiz q-ésima, segue

$$Af(x) \leq 2^{1+\frac{1}{q}} M_q f(x) \quad \text{para quase todo } x \in \Omega \, .$$

Sugerimos comparar a desigualdade acima com (**3.37**) .

Portanto, A é um operador *tipo fraco* (q, q) pois M_q é um operador *tipo fraco* (q, q) . Ou seja, conforme a **subsubseção 1.6.2.1** , para todo $\lambda > 0$, vale

$$|\{x \in \Omega \, : \, Af(x) > \lambda\}| \leq \left(\frac{c}{\lambda} \|f\|_{L^q(\Omega)} \right)^q .$$

Consideremos agora uma função contínua g e a desigualdade $(u+v)^r \leq 2^r(u^r + v^r)$ válida para todo u, v e $r \geq 0$ e o **Teorema 1.27** para obter

$$
\begin{aligned}
[A(f-g)(x)]^q &= \limsup_{Q\downarrow\{x\}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)-g(y)-[f(x)-g(x)]|^q\,dy \\
&\leq 2^q \limsup_{Q\downarrow\{x\}} \left[\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)-f(x)|^q\,dy + \frac{1}{|Q|}\int_Q |g(y)-g(x)|^q\,dy\right) \\
&\leq 2^q \left[\limsup_{Q\downarrow\{x\}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)-f(x)|^q\,dy + \limsup_{Q\downarrow\{x\}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |g(y)-g(x)|^q\,dy\right) \\
&= [2Af(x)]^q + 0\,.
\end{aligned}
$$

Donde, extraindo a raiz q-ésima, segue

$$A(f-g) \leq 2Af \qquad \text{quase sempre}\,.$$

Na desigualdade acima, trocando $-g$ por g e a seguir trocando f por $f-g$, segue $Af \leq 2A(f-g)$. Donde, para todo $\lambda > 0$, segue

$$\{x\in\Omega\,:\,Af(x)>\lambda\} \subseteq \{x\in\Omega\,:\,2A(f-g)(x)>\lambda\} = \left\{x\in\Omega\,:\,A(f-g)(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}.$$

Conforme Adams [1], o espaço das funções contínuas é denso em $L^q(\Omega)$; portanto, dados $\epsilon > 0$ e $\lambda > 0$, existe uma função contínua g tal que $\|f-g\|_{L^q(\Omega)} \leq \epsilon\frac{\lambda}{2}$.

Assim,

$$|\{x\in\Omega\,:\,Af(x)>\lambda\}| \leq \left|\left\{x\in\Omega\,:\,A(f-g)(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \leq \left(\frac{c}{\lambda/2}\|f-g\|_{L^q(\Omega)}\right)^q \leq (c\,\epsilon)^{1/q}.$$

Sendo $\epsilon > 0$ arbitrário, conclui-se $Af = 0$ quase sempre.

Sugerimos comparar esta demonstração com a demonstração do **Teorema 1.27**. ∎

Demonstração do Teorema 3.11. Fixemos x_0 onde vale o limite do **Lema 3.12**.

Pela **Proposição 1.7** com constante c_0 e observando que $\mathcal{P}_Q f(y) - f(x_0)$ é um melhor aproximante de $f(y) - f(x_0)$, segue

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{P}_Q f(y) - f(x_0)| &\leq \|\mathcal{P}_Q f - f(x_0)\|_{L^\infty(Q)} \leq c_0 \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\mathcal{P}_Q f(y) - f(x_0)|^q\,dy\right)^{1/q} \\
&= c_0 \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y) - f(x_0)|^q\,dy\right)^{1/q}.
\end{aligned}
$$

Fazendo $Q \downarrow \{x_0\}$ na desigualdade acima e usando o **Lema 3.12**, segue o teorema. ∎

Capítulo 4

Espaços Regulares , C_p^α e $\mathcal{C}_p^\alpha$

Neste capítulo relacionamos $C_p^\alpha(\Omega)$ e $\mathcal{C}_p^\alpha(\Omega)$, apresentados no **Capítulo 2** , com os espaços de Sobolev, Besov e Lipschitz; onde $\alpha > 0$, $1 \leq p \leq \infty$ e $\Omega = R^n$ ou um cubo de R^n .

Se $k \in N$ e $1 < p \leq \infty$ então vale a igualdade $\mathcal{C}_p^k(\Omega) = W^{k,p}(\Omega)$, com normas equivalentes, devido a Calderón. Se $p = 1$ então $\mathcal{C}_1^k(\Omega) \subset W^{k,1}(\Omega)$. Em DeVore-Sharpley [1] mostra-se que esta inclusão é estrita.

Para $\alpha > 0$ fixo valem as igualdades $C_\infty^\alpha(\Omega) = B_\infty^{\alpha,\infty}(\Omega)$ e $\mathcal{C}_\infty^\alpha(\Omega) = Lip\ \alpha(\Omega)$ com normas equivalentes. Em particular, se $\alpha > 0$ não é inteiro vimos no **Capítulo 2** que $C_p^\alpha(\Omega)$ e $\mathcal{C}_p^\alpha(\Omega)$ são iguais; neste caso, tem-se $B_\infty^{\alpha,\infty}(\Omega) = Lip\ \alpha(\Omega)$. No próximo capítulo concluiremos que $C_p^\alpha(\Omega)$ é espaço de Besov se e somente se $p = \infty$.

Para $C_p^\alpha(R^n)$ existe a inclusão $C_p^\alpha(R^n) \subseteq C_p^\beta(R^n)$ onde $0 < \beta \leq \alpha$ e $1 \leq p \leq \infty$. A demonstração desse resultado não vale para $\Omega =$ cubo de R^n nem para o espaço $\mathcal{C}_p^\alpha(\Omega)$.

Finalmente, definimos o espaço $C_p^0(\Omega)$ para $1 \leq p \leq \infty$.

4.1 Espaço de Sobolev

Antes de definir o espaço de Sobolev enunciamos o resultado principal desta seção.

Calderón identifica $\mathcal{C}_p^k$ com o espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ quando $k \in N$ e $p > 1$ no

Teorema 4.1 . (Calderón) *Sejam $k \in N$ e $\Omega = R^n$ ou um cubo de R^n . Valem as afirmações:*

i) $\mathcal{C}_p^k(\Omega) = W^{k,p}(\Omega)$ *com normas equivalentes, para* $1 < p \leq \infty$

ii) $\mathcal{C}_1^k(\Omega) \subseteq W^{k,1}(\Omega)$.

A demonstração do teorema acima será dada após os dois lemas a seguir.

A inclusão em *ii)* é estrita, conforme um exemplo dado em DeVore-Sharpley [1] .

Iniciamos esta seção com algumas definições para entender o conteúdo do *Teorema de Rellich-Kondrachov* e definir o *Espaço de Sobolev*.

Sejam X e Y dois espaços normados com normas $\|.\|_X$ e $\|.\|_Y$, respectivamente.

Um subconjunto A (de X) é dito *compacto* se toda seqüência de pontos em A possui uma subseqüência convergente (em X) para algum elemento de A.

Um subconjunto B (de X) é dito *pré-compacto* se seu fecho $\overline{B}$ (em relação à norma em X) é compacto.

Um conjunto é *limitado* em um espaço normado se está contido em alguma bola de centro na origem com raio $r > 0$.

Um operador $T : X \to Y$ é *compacto* se o conjunto imagem $T(A)$ é pré-compacto (em Y) para todo conjunto A limitado (em X).

O *operador identidade* $I : X \to Y$ é dado por $If := f$ para todo $f \in X$.

Dizemos que X está *imerso* em Y (e escrevemos $X \hookrightarrow Y$ para denotar essa imersão) quando: $i)$ X é subespaço vetorial de Y e $ii)$ existir uma constante c tal que $\|f\|_Y \leq c\|f\|_X$ para todo $f \in X$.

Em particular, quando X e Y são espaços de Banach, a condição $X \subseteq Y$ equivale a $X \hookrightarrow Y$; conforme Bennett-Sharpley [1], Oklander [1] e Adams [1]. Utilizaremos com freqüência esse critério. Por exemplo, em termos de imersões vale $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$-*fraco* $\hookrightarrow L^q_{loc}(\Omega)$ para todo $q < p$.

Dizemos que $X \hookrightarrow Y$ é uma *imersão compacta* se o operador I é compacto.[49]

O enunciado geral do *Teorema de Rellich-Kondrachov* em Adams [1] impõe condições sobre Ω e p satisfazendo $1 \leq p < \infty$. Veremos que se $\Omega = Q_0 = [0,1]^n$ (o cubo unitário) o *Teorema de Rellich-Kondrachov* ainda vale para $p = \infty$. Para isso apresentamos dois casos particulares do *Teorema de Rellich-Kondrachov* e uma propriedade das imersões compactas, a saber:

$i)$ Se $1 \leq p < \infty$ então a imersão $W^{k,p}(Q_0) \hookrightarrow L^p(Q_0)$ é compacta.

$ii)$ Se $1 \leq p < \infty$ e $kp > n$ então a imersão $W^{k,p}(Q_0) \hookrightarrow L^q(Q_0)$ é compacta para $1 \leq q \leq \infty$.

$iii)$ Se uma das imersões $X \hookrightarrow Y$ e $Y \hookrightarrow Z$ é compacta então a imersão $X \hookrightarrow Z$ é compacta.

O caso geral dos itens $i)$ e $ii)$ está provado em Adams [1]. Prova de $iii)$: por exemplo, suponhamos que a imersão $Y \hookrightarrow Z$ seja compacta. Toda seqüência $\{f_m \in X : m \in N\}$ limitada em X será também limitada em Y pois a imersão é contínua. Como a imersão $Y \hookrightarrow Z$ é compacta, por hipótese, existe uma subseqüência $\{f_{m_j} \in X : j \in N\}$ convergente em Z. Assim, a imersão $X \hookrightarrow Z$ é compacta. Isto prova $iii)$.

Mostraremos que $i)$ ainda vale para $p = \infty$, ou seja:

$iv)$ A imersão $W^{k,\infty}(Q_0) \hookrightarrow L^\infty(Q_0)$ é compacta.

Prova de $iv)$: tendo Q_0 volume finito segue a imersão $W^{k,\infty}(Q_0) \hookrightarrow W^{k,p}(Q_0)$ para todo $1 \leq p < \infty$. Escolhemos $1 \leq p_0 < \infty$ satisfazendo a condição $kp_o > n$. Utilizando o item $ii)$ com $q = \infty$ seguem

$$W^{k,\infty}(Q_0) \hookrightarrow W^{k,p_0}(Q_0) \hookrightarrow L^\infty(Q_0). \tag{4.1}$$

A conclusão do item $iv)$ segue das imersões acima e da propriedade em $iii)$.

Sejam Ω um subconjunto aberto de R^n e f uma função definida em Ω. Denominamos o *suporte* da função f como sendo o fecho (em Ω) do conjunto *supp* $f := \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$.

O suporte de f é, portanto, o menor conjunto fechado (relativo a Ω) onde f é identicamente nulo fora desse conjunto.

Uma *função teste* é um elemento de $C^\infty(\Omega)$ e tendo suporte compacto. O espaço dessas funções teste será denotado por $C_0^\infty(\Omega)$. Portanto, $C_0^\infty(\Omega)$ é o espaço de todas as funções infinitamente diferenciáveis sobre R^n, com suporte compacto. O suporte compacto pode variar para cada elemento de $C_0^\infty(\Omega)$.

Seja $C_c(\Omega)$ o espaço de todas as funções contínuas com suporte compacto.

Uma *distribuição* é um funcional linear contínuo sobre $C_0^\infty(\Omega)$.

Uma *medida de Radon* é um funcional linear contínuo sobre $C_c(\Omega)$.

[49] F. Rellich estudou imersões compactas em 1930; V. I. Kondrachov apresentou essas imersões compactas para espaços de Sobolev em 1945. Segundo Adams [1], imersões compactas são importante para mostrar quando o espectro de operadores diferenciais parciais elípticas lineares (definidas sobre domínios limitados) são discretos.

Sejam f e g duas funções localmente integráveis sobre R^n satisfazendo

$$\int_{R^n} f(x)D^\nu\phi(x)dx = (-1)^{|\nu|}\int_{R^n} g(x)\phi(x)dx \quad \text{para todo } \phi \in C_0^\infty(\Omega)\,. \tag{4.2}$$

Denominamos a função g por *derivada fraca* ou *distribucional* de f e será denotada por $g := D^\nu f$.
Por convenção, para $|\nu| = 0$ definimos $f := D^\nu f$.
Sejam $1 \le p \le \infty$, $k \in N$ e $\Omega \subseteq R^n$. Definimos a *seminorma* e *norma* em $W^{k,p}(\Omega)$, respectivamente, por

$$|f|_{W^{k,p}(\Omega)} := \sum_{|\nu|=k} \|D^\nu f\|_{L^p(\Omega)} \quad \text{e} \quad \|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \|f\|_{L^p(\Omega)} + |f|_{W^{k,p}(\Omega)}\,. \tag{4.3}$$

O *espaço de Sobolev* $W^{k,p}(\Omega)$ é formado pelas funções f em $L^p(\Omega)$ com $\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ finito.[50]
Por definição tem-se $W^{k,p}(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$ e $\|f\|_{L^p(\Omega)} \le \|f\|_{W^{k,p}(\Omega)}$. Assim, vale a imersão

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)\,.^{51} \tag{4.4}$$

A seguir apresentaremos um resultado sobre aproximação de funções por polinômios.

Lema 4.2 . *Sejam $1 \le p \le \infty$ e $k \in N$. Existem uma constante $c > 0$ dependendo de Ω, n, p e k e um polinômio $\pi \in P_{k-1}$ satisfazendo*

$$\|f - \pi\|_{L^p(Q)} \le c|Q|^{k/n}|f|_{W^{k,p}(Q)} \tag{4.5}$$

para todo cubo Q de R^n e toda função f de $W^{k,p}(Q)$.

(**4.5**) vale se substituirmos $|.|_{W^{k,p}(\Omega)}$ por seminormas mais gerais; por exemplo temos o **Lema 4.5** na próxima seção.

Demonstração do Lema 4.2 . Inicialmente, faremos uma simplificação na demonstração do lema.
i) Se (**4.5**) vale para o cubo unitário $Q_0 = [0,1]^n$ então (**4.5**) vale para um cubo Q qualquer.
De fato, seja Q um cubo de lado $l = |Q|^{1/n}$ e vértice a. Consideremos as mudanças de variáveis $\varphi(x) = lx + a$ de Q_0 em Q e $\varphi^{-1}(x) = \frac{x-a}{l}$ de Q em Q_0.
a) Se $f \in W^{k,p}(Q)$ então $f \circ \varphi \in W^{k,p}(Q_0)$. Este fato segue utilizando a definição da derivada distribucional $D^\nu(f \circ \varphi)$ em (**4.2**) e a mudança de variável φ.
Agora, como estamos supondo (**4.5**) válido para Q_0 e $f \circ \varphi \in W^{k,p}(Q_0)$, existem uma constante c e um polinômio $\pi \in P_{k-1}$ satisfazendo

$$\|f \circ \varphi - \pi\|_{L^p(Q_0)} \le c|f \circ \varphi|_{W^{k,p}(Q_0)} \tag{4.6}$$

Donde, utilizando φ^{-1} e (**4.6**) tem-se

$$\|f - \pi \circ \varphi^{-1}\|_{L^p(Q)} = |Q|^{1/p}\|f \circ \varphi - \pi\|_{L^p(Q_0)} \le c|Q|^{1/p}|f \circ \varphi|_{W^{k,p}(Q_0)} = c|Q|^{k/n}|f|_{W^{k,p}(Q)}\,.$$

Donde segue a afirmação *i*). (E o lema ficou provado).
Provaremos (**4.5**) para Q_0. Suponhamos o contrário: (**4.5**) não vale para Q_0.
Neste caso, para todo polinômio $\pi \in P_{k-1}$ e para toda constante c, existe uma função $f \in W^{k,p}(Q_0)$ tal que $\|f - \pi\|_{L^p(Q_0)} > c|f|_{W^{k,p}(Q_0)}$. Em particular, se $c := m$ é um inteiro positivo então

[50] Lizorkin [1] acrescenta que é recente utilizar a seminorma $|f|_{W^{k,p}(\Omega)}$ na teoria dos espaços de Sobolev; mais precisamente, a partir de 1974 por S. L. Sobolev, S. V. Uspenskiĭ, L. D. Kudrjavcev, T. S. Pigolkina e outros.
As derivadas distribucionais de ordem intermediárias $|\nu| = 0, 1, 2, \cdots, k-1$ podem ser estimadas em termos das derivadas de ordem zero e k; isto está mostrado em Bennett-Sharpley [2].

[51] Outra inclusão é $W^{k,p}(\Omega) \subseteq L^q(\Omega)$ com $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{\alpha}$ e $1 \le p \le \infty$; conforme Stein[2].

existe $f_m \in W^{k,p}(Q_0)$ satisfazendo esta desigualdade estrita. Donde, variando $m \in N$, existe uma seqüência de funções $\{f_m \in W^{k,p}(Q_0) : m \in N\}$ tal que

$$\|f_m - \pi\|_{L^p(Q_0)} > m|f_m|_{W^{k,p}(Q_0)} \quad \text{para todo polinômio } \pi \in P_{k-1}\,. \tag{4.7}$$

Tomando, em (**4.7**), o ínfimo sobre todos os polinômios $\pi \in P_{k-1}$ segue

$$\inf_{\pi \in P_{k-1}} \|f_m - \pi\|_{L^p(Q_0)} \geq m|f_m|_{W_p^k(Q_0)}\,. \tag{4.8}$$

Denotamos por $\pi_m \in P_{k-1}$ o melhor aproximante de $f_m \in L^p(Q_0)$, isto é, π_m satisfaz

$$\|f_m - \pi_m\|_{L^p(Q_0)} = \inf_{\pi \in P_{k-1}} \|f_m - \pi\|_{L^p(Q_0)}\,.$$

Definimos $g_m := \lambda_m(f_m - \pi_m) \in W^{k,p}(Q_0)$ onde $\lambda_m := 1/\|f_m - \pi\|_{L^p(Q_0)}$.
$b)$ Os números λ_m estão bem definidos pois os denominadores de λ_m nunca se anulam.
De fato, se $\|f_{m_0} - \pi\|_{L^p(Q_0)} = 0$ para algum m_0 então, por (**4.7**), irá produzir o seguinte absurdo:

$$0 = \|f_{m_0} - \pi\|_{L^p(Q_0)} > m_0|f_{m_0}|_{W^{k,p}(Q_0)} \geq 0\,.$$

Isto prova $b)$.
Além de $\|g_m\|_{L^p(Q_0)} = 1$, a função g_m possui outras duas propriedades:

$$ii) \quad \inf_{\pi \in P_{k-1}} \|g_m - \pi\|_{L^p(Q_0)} = \|g_m\|_{L^p(Q_0)} \quad \text{e} \quad iii) \quad |g_m|_{W^{k,p}(Q_0)} = \lambda_m |f_m|_{W^{k,p}(Q_0)}\,.$$

Verificaremos $ii)$ e $iii)$. Para provar $ii)$ tomamos o ínfimo sobre todos os $\pi \in P_{k-1}$ nas desigualdades $\|g_m\|_{L^p(Q_0)} \leq \|g_m - \pi\|_{L^p(Q_0)} + \|\pi\|_{L^p(Q_0)}$ e $\|g_m - \pi\|_{L^p(Q_0)} \leq \|g_m\|_{L^p(Q_0)} + \|\pi\|_{L^p(Q_0)}$ e utilizamos o fato $\inf\limits_{\pi \in P_{k-1}} \|\pi\|_{L^p(Q_0)} = 0$ (pois o polinômio nulo é um elemento de P_{k-1}). O item $iii)$ é

$$\begin{aligned}
|g_m|_{W^{k,p}(Q_0)} &= \sum_{|\nu|=k} \|D^\nu g_m\|_{L^p(Q_0)} = \sum_{|\nu|=k} \|D^\nu(\lambda_m(f_m - \pi_m))\|_{L^p(Q_0)} \\
&= \sum_{|\nu|=k} \|\lambda_m(D^\nu f_m - \underbrace{D^\nu \pi_m}_{zero})\|_{L^p(Q_0)} = \lambda_m \sum_{|\nu|=k} \|D^\nu f_m\|_{L^p(Q_0)} \\
&= \lambda_m |f_m|_{W^{k,p}(Q_0)}
\end{aligned}$$

Pela propriedade $iii)$ acima, da definição de $\pi + m$ e (**4.8**), seguem

$$1 = \|g_m\|_{L^p(Q_0)} = \lambda_m \|f_m - \pi_m\|_{L^p(Q_0)} \geq m\lambda_m |f_m|_{W^{k,p}(Q_0)} = m|g_m|_{W^{k,p}(Q_0)}\,. \tag{4.9}$$

A seqüência $\{g_m \in W^{k,p}(Q_0) : m \in N\}$ forma um conjunto limitado em $W^{k,p}(Q_0)$ pois, por (**4.9**),

$$\|g_m\|_{W^{k,p}(Q_0)} = \|g_m\|_{L^p(Q_0)} + |g_m|_{W^{k,p}(Q_0)} \leq 1 + \frac{1}{m} \leq 2 \quad \text{para todo } m = 1, 2, \cdots. \tag{4.10}$$

Pelos comentários realizados no início desta seção tem-se que a imersão em (**4.4**) é compacta para todo $1 \leq p \leq \infty$. Assim, a seqüência $\{g_m \in W^{k,p}(Q_0) : m \in N\}$ é um conjunto pré-compacto em $L^p(Q_0)$, isto é, $\overline{\{g_m \in W^{k,p}(Q_0) : m \in N\}}$ é compacto e

$$\{g_m \in W^{k,p}(Q_0) : m \in N\} \subseteq \overline{\{g_m \in W^{k,p}(Q_0) : m \in N\}} \subset L^p(Q_0)\,.$$

Portanto a seqüência $\{g_m \in W^{k,p}(Q_0) : m \in N\}$ possui uma subseqüência convergente $\{g_{m_j} \in W^{k,p}(Q_0) : j \in N\}$ que converge (na norma de $L^p(Q_0)$) para $g \in L^p(Q_0)$, isto é,

$$\lim_{j\to\infty} \|g_{m_j} - g\|_{L^p(Q_0)} = 0\,. \tag{4.11}$$

c) Vale a afirmação:

$$\inf_{\pi\in P_{k-1}} \|g-\pi\|_{L^p(Q_0)} = 1\,.$$

De fato, para o polinômio $\pi \in P_{k-1}$ e para a subseqüência $\{g_{m_j} \in W^{k,p}(Q_0) : j \in N\}$ temos

$$\begin{cases} \|g_{m_j}\|_{L^p(Q_0)} \le \|g_{m_j} - g\|_{L^p(Q_0)} + \|g\|_{L^p(Q_0)} \\ \|g\|_{L^p(Q_0)} \le \|g_{m_j} - g\|_{L^p(Q_0)} + \|g_{m_j}\|_{L^p(Q_0)} \end{cases}$$

Fazendo $j \to \infty$ nas relações acima, utilizando (**4.11**) e *ii*) seguem

$$\begin{cases} \|g\|_{L^p(Q_0)} = \lim_{j\to\infty} \|g_{m_j} - g\|_{L^p(Q_0)} = \lim_{j\to\infty} 1 = 1 \\ \|g-\pi\|_{L^p(Q_0)} \le \lim_{j\to\infty} \|g_{m_j} - \pi\|_{L^p(Q_0)} \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \|g_{m_j} - \pi\|_{L^p(Q_0)} \le \|g_{m_j} - g\|_{L^p(Q_0)} + \|g-\pi\|_{L^p(Q_0)} \\ \|g-\pi\|_{L^p(Q_0)} \le \|g_{m_j} - g\|_{L^p(Q_0)} + \|g_{m_j} - \pi\|_{L^p(Q_0)} \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \inf_{\pi\in P_{k-1}} \|g-\pi\|_{L^p(Q_0)} &= \inf_{\pi\in P_{k-1}} \left(\lim_{j\to\infty} \|g_{m_j} - \pi\|_{L^p(Q_0)}\right) = \lim_{j\to\infty} \left(\inf_{\pi\in P_{k-1}} \|g_{m_j} - \pi\|_{L^p(Q_0)}\right) \\ &= \lim_{j\to\infty} \|g_{m_j} - \pi\|_{L^p(Q_0)} = \|g\|_{L^p(Q_0)} = 1 \end{aligned}$$

Donde segue a afirmação *c*).
d) Vale a seguinte afirmação:

$$|g|_{W^{k,p}(Q_0)} = \lim_{j\to\infty} |g_{m_j}|_{W^{k,p}(Q_0)} = 0\,.$$

Na verdade, esta afirmação consiste em verificar

$$iv) \ \lim_{j\to\infty} |g_{m_j}|_{W^{k,p}(Q_0)} = 0 \quad \text{e} \quad v) \ |g|_{W^{k,p}(Q_0)} = 0\,.$$

O item *iv*) segue de (**4.9**). Pela definição de $|.|_{W^{k,p}(Q_0)}$ em (**4.3**), tem-se $\|D^\nu g_{m_j}\|_{L^p(Q_0)} \le |g_{m_j}|_{W^{k,p}(Q_0)}$ para todo $|\nu| = k$. Donde, por *iv*), segue

$$\lim_{j\to\infty} \|D^\nu g_{m_j}\|_{L^p(Q_0)} = 0\,. \tag{4.12}$$

Para verificar o item *v*) vamos mostrar que $D^\nu g$ existe e $D^\nu g = 0$.
De fato,

$$\lim_{j\to\infty} \int_{Q_0} (g_{m_j} - g)\phi = 0 \quad \text{para todo } \phi \in C_0^\infty(R^n)\,.$$

(É suficiente utilizar a *desigualdade de Hölder* e (**4.11**) para obter

$$\lim_{j\to\infty}\left|\int_{Q_0}(g_{m_j}-g)\phi\right| \le \lim_{j\to\infty}\int_{Q_0}|(g_{m_j}-g)\phi| \le \lim_{j\to\infty}\|g_{m_j}-g\|_{L^p(Q_0)}\|\phi\|_{L^q(Q_0)} = 0$$

onde $p^{-1}+q^{-1}=1$.)

Assim,

$$\int_{Q_0} g\phi = \lim_{j\to\infty}\int_{Q_0} g_{m_j}\phi \quad \text{para toda } \phi \in C_0^\infty(R^n). \tag{4.13}$$

Mas $D^\nu\phi \in C_0^\infty(R^n)$ para toda $\phi \in C_0^\infty(R^n)$. Logo, por (**4.13**), também vale

$$\int_{Q_0} gD^\nu\phi = \lim_{j\to\infty}\int_{Q_0} g_{m_j}D^\nu\phi = (-1)^{|\nu|}\lim_{j\to\infty}\int_{Q_0} D^\nu g_{m_j}\phi = 0 = (-1)^{|\nu|}\int_{Q_0} 0\phi$$

para toda $\phi \in C_0^\infty(R^n)$, onde na terceira igualdade utilizamos a seguinte relação:

$$\lim_{j\to\infty}\left|\int_{Q_0} D^\nu g_{m_j}\phi\right| \le \lim_{j\to\infty}\int_{Q_0}|D^\nu g_{m_j}\phi| \le \lim_{j\to\infty}\|D^\nu g_{m_j}\|_{L^p(Q_0)}\|\phi\|_{L^p(Q_0)} = 0$$

obtida utilizando a *desigualdade de Hölder*, (**4.12**) e $p^{-1}+q^{-1}=1$.

Portanto, existe uma função $h = 0 \in L^1_{loc}(\Omega)$ satisfazendo (**4.2**). Donde, por definição, $0 = h = D^\nu g$.

Logo,

$$|g|_{W^{k,p}(Q_0)} = \sum_{|\nu|=k}\|D^\nu g\|_{L^p(Q_0)} = 0.$$

Isto prova v). E, portanto, também prova d).

Como $D^\nu g = 0$ para todo $|\nu| = k$ tem-se $g \in P_{k-1}$.

Este fato e por c) produzem o seguinte absurdo:

$$0 = \inf_{\pi\in P_{k-1}}\|g-\pi\|_{L^p(Q_0)} = 1.$$

Isto mostra o teorema. ∎

Para não sobrecarregar a notação do próximo lema, definimos a função

$$\mathcal{D}f(x) := \sum_{|\nu|=k}|D^\nu f(x)| \quad \text{para todo } x \in \Omega. \tag{4.14}$$

Se $\alpha = k$ é um número natural então $f_\alpha^\flat$ será estimado em termos de $\mathcal{D}f$.

De fato, para qualquer função f de $W^{k,1}_{loc}(\Omega)$ e para qualquer cubo Q contido em Ω, tem-se $f \in W^{k,1}(Q)$. Assim, por (**4.14**) e pelo **Lema 4.2** com $p = 1$, existem uma constante c_1 e um polinômio π em $P_{(k)} = P_{k-1}$ tal que

$$\int_Q |f-\pi| \le c_1|Q|^{k/n}\sum_{|\nu|=k}\left(\int_Q |D^\nu f|\right) = c_1|Q|^{k/n}\int_Q\left(\sum_{|\nu|=k}|D^\nu f|\right) = c_1|Q|^{k/n}\int_Q \mathcal{D}f.$$

Dividindo esta desigualdade por $|Q|^{\frac{k}{n}+1}$, tomando o ínfimo sobre todo $\pi \in P_{(k)}$ e supremo sobre todos os cubos Q tais que $x \in Q \subset \Omega$ e utilizando o **Lema 2.2** com constante $c_2 > 0$, obtemos

$$c_2 f_k^\flat(x) \le c_1 \sup_{\Omega\supset Q\ni x}\frac{1}{|Q|}\int_Q \mathcal{D}f \le c_1 \sup_{R^n\supset Q\ni x}\frac{1}{|Q|}\int_Q \mathcal{D}f\chi_\Omega = c_1 M(\mathcal{D}f\chi_\Omega)(x) \tag{4.15}$$

para todo $x \in \Omega$ e onde M é o operador maximal de Hardy-Littlewood dado por (**1.32**).

(**4.15**) é a primeira parte do

Lema 4.3 .[52] *Existem constantes c_3 e $c_4 > 0$ tais que, para cada $f \in W^{k,1}_{loc}(\Omega)$ satisfazem*

$$i) \quad f^\flat_k(x) \le c_3 M(\mathcal{D} f \chi_\Omega)(x) \qquad \textit{para todo } x \in \Omega\,.$$

Por outro lado, para toda função $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ com $f^\flat_k \in L^1_{loc}(\Omega)$, as derivadas fracas $D^\nu f$ com $|\nu| = k$, existem e satisfazem

$$ii) \quad \mathcal{D} f(x) \le c_4 f^\flat_k(x) \qquad \textit{para quase todo ponto } x \in \Omega\,.$$

Demonstração. O item *i*) é (**4.15**) com constante $c_3 := c_1/c_2$.

Mostraremos o item *ii*). Para $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ consideramos qualquer função teste $\phi \in C^\infty_0(\Omega)$ com *supp* $\phi := K \subset \Omega$ compacto. Escolhemos uma função $\Psi \in C^\infty(R^n)$ tendo suporte no cubo unitário $Q_0 = [0,\, 1]^n$ e $\int_{R^n} \Psi = 1$.

Sejam $\epsilon > 0$ e

$$\Psi_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon^n}\Psi\left(\frac{1}{\epsilon}x\right).$$

Portanto, Ψ_ϵ tem suporte contido no cubo ϵQ_0 de lado de comprimento ϵ e mesmo centro de Q_0.

Se $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno, as funções $f_\epsilon := f * \Psi_\epsilon$ estão definidas em K.

Para estimar $|D^\nu f_\epsilon(z)|$ com $|\nu| = k$ e $z \in K$ necessitaremos de quatro observações:

a) Para toda função $g \in C^\infty_0(\Omega)$ com suporte compacto e todo polinômio π de grau $< |\nu|$ vale

$$\int_{R^n} \pi D^\nu g = (-1)^{|\nu|} \int_{R^n} \underbrace{(D^\nu \pi)}_{zero} g = 0\,.$$

b) A função Ψ_ϵ possui suporte compacto, mais precisamente, possui suporte sobre Q_ϵ onde Q_ϵ é o cubo centrado na origem com lado de comprimento 2ϵ

c) Como $D^\nu \Psi_\epsilon(x) = \epsilon^{-k} D^\nu \Psi(\epsilon^{-1}x)\epsilon^n$ para todo $x \in R^n$ segue

$$\|D^\nu \Psi_\epsilon\|_{L^\infty(R^n)} \le \epsilon^{-k-n}\|D^\nu \Psi\|_{L^\infty(R^n)} \le c_0 \epsilon^{-k-n} \qquad \text{onde } c_0 := \|D^\nu \Psi\|_{L^\infty(R^n)}\,.$$

d) O cubo Q_ϵ transladado pelo vetor $z \in R^n$, denotado por $z + Q_\epsilon$, tem volume $|z + Q_\epsilon| = |Q_\epsilon| = (2\epsilon)^n$.

Nas condições de a, b, c e d) e utilizando o (**3.30**) e (**3.36**) com constante c_1 e um polinômio π_z de grau $< |\nu|$, seguem

$$\begin{aligned}
|D^\nu f_\epsilon(z)| &= |D^\nu(f * \Psi_\epsilon)(z)| = |f * D^\nu \Psi_\epsilon(z)| = \left|\int_{R^n} f(y) D^\nu \Psi_\epsilon(z-y)dy\right| \\
&= \left|\int_{R^n} [f(y) - \pi_z(y)] D^\nu \Psi_\epsilon(z-y)dy\right| \\
&\le \|D^\nu \Psi_\epsilon\|_{L^\infty(R^n)} \int_{z+Q_\epsilon} |f(y) - \pi_z(y)|dy \\
&\le \frac{c_0}{\epsilon^{k+n}} \int_{z+Q_\epsilon} |f(y) - \pi_z(y)|dy = \frac{c_0 2^k}{(2\epsilon)^k}\frac{2^n}{(2\epsilon)^n}\int_{z+Q_\epsilon} |f(y) - \pi_z(y)|dy \\
&= \frac{c_0 2^{k+n}}{|z+Q_\epsilon|^{k/n}}\frac{1}{|z+Q_\epsilon|}\int_{z+Q_\epsilon} |f(y) - \pi_z(y)|dy \\
&\le c_0 2^{k+n} N^k_1 f(z) \le c_0 c_1 2^{k+n} f^\flat_k(z)\,.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

[52] O lema acima pode ser estendido para α não inteiro e isto está feito em DeVore-Sharpley [1].

Definimos uma função $g(z) := \lim_{\epsilon\to 0} D^\nu f_\epsilon(z)$ para todo ponto $z \in K$. A função g está bem definida pois $D^\nu f_\epsilon$ é contínua no compacto K para todo ϵ suficientemente pequeno.

Podemos identificar g como sendo a derivada fraca $D^\nu f$; para isso necessitaremos mostrar que $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ e satisfaz (**4.2**).

Primeiramente mostraremos que $g \in L^1_{loc}(\Omega)$.

De fato, pelo *Lema de Fatou* e (**4.16**) seguem

$$\int_K |g(z)| = \int_K \lim_{\epsilon\to 0} |D^\nu f_\epsilon(z)| \leq \liminf_{\epsilon\to 0} \int_K |D^\nu f_\epsilon(z)| \leq c_0 c_1 2^{k+n} ||f_k^\flat||_{L^1(K)} < \infty .$$

Vejamos agora, um resultado que está provado em Wheeden-Zygmund [1]: para $1 \leq p < \infty$ tem-se

$$\lim_{\epsilon\to 0} ||f_\epsilon - f||_{L^p(R^n)} = 0 . \tag{4.17}$$

Afirmação:

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{R^n} (D^\nu \phi) f_\epsilon = \int_{R^n} (D^\nu \phi) f .$$

(De fato, pela *desigualdade de Hölder*, (**4.17**) e $p^{-1} + q^{-1} = 1$, seguem

$$\lim_{\epsilon\to 0} \left| \int_{R^n} (D^\nu \phi)(f_\epsilon - f) \right| \leq \lim_{\epsilon\to 0} \int_{R^n} |(D^\nu \phi)(f_\epsilon - f)| \leq ||D^\nu \phi||_{L^q(R^n)} \lim_{\epsilon\to 0} ||f_\epsilon - f||_{L^p(R^n)} = 0 .)$$

De (**4.16**) e pela relação acima, seguem

$$\left| \int_{R^n} \phi D^\nu f \right| \left| \int_{R^n} (D^\nu \phi) f \right| = \lim_{\epsilon\to 0} \left| \int_{R^n} (D^\nu \phi) f_\epsilon \right| \leq \lim_{\epsilon\to 0} \int_K |\phi| |D^\nu f_\epsilon| c_0 c_1 2^{k+n} \int_K |\phi| f_k^\flat \tag{4.18}$$

Verificaremos a relação

$$|D^\nu f(z)| \leq c_0 c_1 2^{k+n} f_k^\flat(z) \qquad \text{para quase todo } z \in K .$$

De fato, identificando funções $h \in L^1_{loc}(\Omega)$ como sendo medidas de Radon $h := L_h \phi := \int_\Omega h\phi$ para todo $\phi \in C_c(\Omega)$, seguem, por (**4.18**),

$$\begin{aligned} c_0 c_1 2^{k+n} f_k^\flat(z) - |D^\nu f(z)| &= c_0 c_1 2^{k+n} \int_\Omega f_k^\flat \phi - \left| \int_\Omega (D^\nu f) \phi \right| \\ &\geq c_0 c_1 2^{k+n} \int_\Omega f_k^\flat \phi - c_0 c_1 2^{k+n} \int_\Omega f_k^\flat |\phi| \\ &\geq c_0 c_1 2^{k+n} \int_\Omega f_k^\flat \phi - c_0 c_1 2^{k+n} \int_\Omega f_k^\flat \phi = 0 \end{aligned}$$

para quase todo $z \in K$ e para todo $|\nu| = k$.

Donde,

$$\mathcal{D}f(x) = \sum_{|\nu|=k} |D^\nu f(x)| \leq c_0 c_1 2^{k+n} \left(\sum_{|\nu|=k} 1 \right) f_k^\flat(x) \quad \text{para quase todo } x \in \Omega .$$

Isto finaliza o teorema. ■

Demonstração do Teorema 4.1 . Verificaremos as inclusões $\mathcal{C}_p^k(\Omega) \subseteq W^{k,p}(\Omega)$ e $\mathcal{C}_p^k(\Omega) \supseteq W^{k,p}(\Omega)$. Mostraremos a primeira inclusão considerando $1 \leq p \leq \infty$. Na segunda inclusão utilizaremos, de modo crucial, a hipótese $1 < p \leq \infty$.

Primeiro, suponhamos $f \in \mathcal{C}_p^k(\Omega)$; isto é, f e $f_k^\flat$ são elementos de $L^p(\Omega)$ ($\subseteq L^1_{loc}(\Omega)$).

Para todo $|\nu| = k$ e quase todo $x \in \Omega$, por (**4.14**) e item *ii*) do **Lema 4.3** com constante c_2, seguem

$$|D^\nu f(x)| \leq \sum_{|\nu|=k} |D^\nu f(x)| \leq= \mathcal{D}f(x) \leq c_2 f_k^\flat(x).$$

Assim, pela desigualdade acima e (**4.3**), temos

$$|f|_{W^{k,p}(\Omega)} = \sum_{|\nu|=k} \|D^\nu f\|_{L^p(\Omega)} \leq c_2 \left(\sum_{|\nu|=k} 1 \right) \|f_k^\flat\|_{L^p(\Omega)} = \tilde{c}_2 \|f_k^\flat\|_{L^p(\Omega)}$$

onde $\tilde{c}_2 := c_2 \left(\sum_{|\nu|=k} 1 \right)$.

Somando $\|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty$ em cada lado da desigualdade acima, seguem, pelas definições das normas em $W^{k,p}(\Omega)$ e $C_p^k(\Omega)$ (dadas em (**4.3**) e (**2.38**), respectivamente):

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \|f\|_{L^p(\Omega)} + |f|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \max\{1, \tilde{c}_2\}[\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|f_k^\flat\|_{L^p(\Omega)}] = \max\{1, \tilde{c}_2\}\|f\|_{C_p^k(\Omega)} < \infty. \tag{4.19}$$

Suponhamos agora $f \in W^{k,p}(\Omega) \subseteq W_{loc}^{k,1}(\Omega)$. (Esta inclusão é verificada utilizando, em (**4.3**), a mesma técnica para mostrar que $L^p(\Omega) \subseteq L_{loc}^1(\Omega)$.) Portanto, vale **Lema 4.3** item *i*) com constante c_3; onde aplicando a norma $L^p(\Omega)$ e a limitação do operador M (em $L^p(\Omega)$ para $1 < p \leq \infty$) com constante c_4 e recordando a notação em (**4.3**) fica

$$\|f_k^\flat\|_{L^p(\Omega)} \leq c_3\|M(\mathcal{D}f\chi_\Omega)\|_{L^p(\Omega)} \leq c_3c_4\|\mathcal{D}f\chi_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \leq c_3c_4 \sum_{|\nu|=k} \|D^\nu f\|_{L^p(\Omega)} = c_4c_4|f|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

Somando $\|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty$ em cada lado da desigualdade acima segue, por (**4.3**) e (**2.38**),

$$\|f\|_{C_p^k(\Omega)} \leq \max\{1, c_3c_4\}\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} < \infty. \tag{4.20}$$

Assim, $f \in C_p^k(\Omega)$. A equivalência das normas provém de (**4.19**) e (**4.20**).
Observamos que a desigualdade (**4.19**) vale também para $p = 1$. ■

4.2 Espaços de Besov

Antes de definir o espaço de Besov apresentamos o resultado principal desta seção.

Teorema 4.4 . *Sejam $\alpha > 0$ e $\Omega = R^n$ ou um cubo de R^n, então*

$$C_\infty^\alpha(\Omega) \;=\; B_\infty^{\alpha,\infty}(\Omega) \qquad \textit{com normas equivalentes.}$$

A demonstração do teorema acima será dada no final desta seção.

A seguir apresentamos o espaço de Besov. Sejam Ω um domínio em R^n e $r \in N$. Fixado um vetor $h \in R^n$, definimos o conjunto

$$\Omega_{r,h} := \{x \in \Omega : x, x+h, \cdots, x+rh \in \Omega\}.$$

Para $f \in L^p(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$ definimos o *r-ésimo módulo de regularidade* por

$$\omega_r(f,t)_p := \sup_{|h|\leq t} \|\Delta_h^r f\|_{L^p(\Omega_{r,h})} \tag{4.21}$$

onde Δ_h^r são os operadores diferenças dados na **subseção 2.4.1**.

Para $\alpha > 0$ e $q > 0$, definimos $r := [\alpha] + 1$, a *seminorma* e a *norma*, respectivamente, por

$$\begin{cases} |f|_{B_p^{\alpha,q}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\int_0^\infty [t^{-\alpha}\omega_r(f,t)_p]^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} & \text{se } q < \infty \\ \sup_{t>0} t^{-\alpha}\omega_r(f,t)_p & \text{se } q = \infty \end{cases} \\ \|f\|_{B_p^{\alpha,q}(\Omega)} := \|f\|_{L^p(\Omega)} + |f|_{B_p^{\alpha,q}(\Omega)} . \end{cases} \tag{4.22}$$

O *espaço de Besov* $B_p^{\alpha,q}(\Omega)$ é o conjunto de funções em $L^p(\Omega)$ cuja norma $\|.\|_{B_p^{\alpha,q}(\Omega)}$ é finita. Os números reais α e q são chamados de *índice de regularidade* e *índice de regularidade de segunda ordem*, respectivamente. $B_p^{\alpha,q}(\Omega)$ é um espaço de Banach para todo $1 \leq p \leq \infty$.

Agora uma versão do **Lema 4.1** adaptado ao espaço de Besov.

Lema 4.5 . *Sejam $1 \leq p \leq \infty$, $\alpha > 0$ e $q > 0$. Existem uma constante c dependendo de Ω, n, p, q e α e um polinômio $\pi \in P_{[\alpha]}$ satisfazendo*

$$\|f - \pi\|_{L^p(Q)} \leq c|Q|^{\alpha/n}|f|_{B_p^{\alpha,q}(\Omega)} \tag{4.23}$$

para todo cubo Q de R^n e toda função f de $B_p^{\alpha,q}(Q)$.

Demonstração . Também faremos uma simplificação na demonstração deste teorema. Se (**4.23**) vale para o cubo unitário $Q_0 = [0,1]^n$ então (**4.23**) vale para cubo Q qualquer. Vejamos. Se (**4.23**) vale para Q_0 consideraremos um cubo Q de lado $l = |Q|^{1/n}$ e vértice a, uma função f definida em Q e $\varphi(x) = lx + a$ uma transformação linear que leva Q_0 em Q. Nestas condições a função $F := f \circ \varphi$ possui módulo de regularidade que satisfaz

$$\omega_r(F,t)_p = l^{-n/p}\omega_r(f,lt)_p . \tag{4.24}$$

De fato, de (**2.50**) e da definição de φ temos

$$\begin{aligned} \Delta_h^r F(x) &= \sum_{i=0}^r (-1)^{r-i} \binom{k}{i} F(x+ih) = \sum_{i=0}^r (-1)^{r-i} \binom{k}{i} f \circ \varphi(x+ih) \\ &= \sum_{i=0}^r (-1)^{r-i} \binom{k}{i} f(l(x+ih)+a) = \sum_{i=0}^r (-1)^{r-i} \binom{k}{i} f(\varphi(x)+ilh) \\ &= \Delta_{lh}^r f(\varphi(x)) \end{aligned}$$

donde, utilizando a mudança de variáveis φ^{-1}, seguem

$$\begin{aligned} \|\Delta_h^r F\|_{L^p(\Omega_{x,h})} &= \left(\int_{\Omega_{x,h}} |\Delta_h^r F(x)|^p dx \right)^{1/p} = \left(\int_{\Omega_{x,h}} |\Delta_{lh}^r (f \circ \varphi)(x)|^p dx \right)^{1/p} \\ &= \frac{1}{l^{n/p}} \left(\int_{\Omega_{x,h}} |\Delta_{lh}^r f(y)|^p dy \right)^{1/p} = \frac{1}{l^{n/p}} \|\Delta_{lh}^r f\|_{L^p(\Omega_{x,h})} . \end{aligned}$$

Assim, tomando o supremo em h onde $|h| \leq t$ na relação acima, seguem

$$\omega_r(F,t)_p = \sup_{|h|\leq t} \|\Delta_h^r F\|_{L^p(\Omega_{x,h})} = l^{-n/p} \sup_{|lh|\leq lt} \|\Delta_{lh}^r f\|_{L^p(\Omega_{x,h})} = l^{-n/p}\omega_r(f,lt)_p .$$

Isto demonstra (**4.24**).

Agora estimaremos as seminormas de F e f no espaço de Besov utilizando (**4.22**).

Se $q < \infty$,

$$|F|_{B_p^{\alpha,q}(Q_0)} = \left(\int_0^\infty [t^{-\alpha}\omega_r(F,t)_p]^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} = l^{-n/p}\left(\int_0^\infty [t^{-\alpha}\omega_r(f,lt)_p]^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q}$$

$$= l^{\alpha-n/p}\left(\int_0^\infty [(lt)^{-\alpha}\omega_r(f,lt)_p]^q \frac{d(lt)}{lt}\right)^{1/q} = l^{\alpha-n/p}|f|_{B_p^{\alpha,q}(Q)}.$$

Para $q = \infty$ tem-se

$$|F|_{B_p^{\alpha,\infty}(Q_0)} = \sup_{0<t} t^{-\alpha}\omega_r(F,t)_p = l^{\alpha-n/p}\sup_{0<lt}(lt)^{-\alpha}\omega_r(f,lt)_p = l^{\alpha-n/p}|f|_{B_p^{\alpha,\infty}(Q)}.$$

E o caso geral de (**4.23**) segue do caso para Q_0.

Conforme DeVore-Sharpley [1], utilizando o fato de que a bola unitária em $B_p^{\alpha,q}$ é compacto em $L^p(\Omega)$, podemos estabelecer (**4.23**) para o cubo unitário Q_0 do mesmo modo que foi feito para (**4.5**) para o cubo unitário. conforme DeVore-Sharpley [1]. ■

Demonstração do Teorema 4.4. Verificaremos as inclusões $C_\infty^\alpha(\Omega) \subseteq B_\infty^{\alpha,\infty}(\Omega)$ e $C_\infty^\alpha(\Omega) \supseteq B_\infty^{\alpha,\infty}(\Omega)$. Seja $f \in C_\infty^\alpha(\Omega)$, isto é, f e $f_\alpha^\sharp \in L^\infty(\Omega)$.

Tomando a norma $\|.\|_{L^\infty(Q)}$ e a seguir o supremo sobre h satisfazendo $|h| < t$ no **Teorema 2.8** item $i)$ com $k := [\alpha]+1 > [\alpha]$ e constante c_0 seguem

$$\omega_k(f,t)_\infty = \sup_{|h|<t}\|\Delta_h^k f\|_{L^\infty(Q)} \le c_0 \sup_{|h|<t}\sum_{i=0}^{k}\|f_\alpha^\sharp(.+ih)\|_{L^\infty(Q)}|h|^\alpha \le c_0(k+1)\|f_\alpha^\sharp\|_{L^\infty(\Omega)}t^\alpha.$$

(A invariância da medida de Lebesgue comentada na **seção 1.1** foi utilizada na última desigualdade acima.)

Pelas definições das normas $\|.\|_{B_\infty^{\alpha,\infty}(\Omega)}$ e $\|.\|_{C_\infty^\alpha(\Omega)}$ juntamente com a desigualdade acima, tem-se

$$\begin{aligned}\|f\|_{B_\infty^{\alpha,\infty}(\Omega)} &= \|f\|_{L^\infty(\Omega)} + \sup_{t>0} t^{-\alpha}\omega_r(f,t)_\infty \le \|f\|_{L^\infty(\Omega)} + c_0(k+1)\|f_\alpha^\sharp\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\le \max\{1, c_0(k+1)\}\|f\|_{C_\infty^\alpha(\Omega)} < \infty.\end{aligned} \tag{4.25}$$

Assim, $f \in B_\infty^{\alpha,\infty}(\Omega)$ e fica provado a primeira das inclusões.

Para verificar a outra inclusão, seja $f \in B_\infty^{\alpha,\infty}(\Omega)$. Então $f \in L^\infty(\Omega)$.

Pelo **Lema 4.5**, existem um polinômio $\pi \in P_{[\alpha]}$ e uma constante c_1 tais que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f-\pi| \le \|f-\pi\|_{L^\infty(Q)} \le c_1|Q|^{\alpha/n}|f|_{B_\infty^{\alpha,\infty}(Q)} \le c_1|Q|^{\alpha/n}|f|_{B_\infty^{\alpha,\infty}(\Omega)}$$

onde Q é um cubo qualquer de R^n.

Dividindo a desigualdade acima por $|Q|^{\alpha/n}$ e tomando o ínfimo sobre $\pi \in P_{[\alpha]}$ e o supremo sobre cubos Q tais que $\Omega \supset Q \ni x$, pelo **Lema 2.2** item $i)$ com constante $c_2 > 0$ resulta $c_2 f_\alpha^\sharp(x) \le c_1|f|_{B_\infty^{\alpha,\infty}(\Omega)}$ para todo $x \in \Omega$. Donde, somando $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty$ em ambos os lados da desigualdade, temos

$$\begin{aligned}\|f\|_{C_\infty^\alpha(\Omega)} &= \|f\|_{L^\infty(\Omega)} + \|f_\alpha^\sharp\|_{L^\infty(\Omega)} \le \|f\|_{L^\infty(\Omega)} + \frac{c_1}{c_2}|f|_{B_\infty^{\alpha,\infty}(\Omega)} \\ &\le \max\left\{1, \frac{c_1}{c_2}\right\}\|f\|_{B_\infty^{\alpha,\infty}(\Omega)} < \infty.\end{aligned} \tag{4.26}$$

Logo, $f \in C_\infty^\alpha(\Omega)$. A equivalência das normas segue de (**4.25**) e (**4.26**). ■

4.3 Espaços de Lipschitz

Antes de definir o espaço de Lipschitz apresentamos o principal resultado desta seção.

Teorema 4.6 . *Se Ω é o espaço euclideano R^n ou um cubo em R^n e $\alpha > 0$, então*

$$C^\alpha_\infty(\Omega) \; = \; Lip\ \alpha(\Omega) \qquad \textit{com normas equivalentes.}$$

A demonstração do teorema acima será dada no final desta seção.

A seguir definimos o espaço $Lip\ \alpha(\Omega)$. Conforme DeVore-Sharpley [1] e Wallin [1], existem diversas definições para o espaço de Lipschitz, $Lip\ \alpha(\Omega)$ onde α é chamado *índice de regularidade.* O próximo resultado mostra a equivalência dessas definições quando Ω é R^n ou um cubo de R^n.

Especial atenção será dada às constantes do

Teorema 4.7 . *Sejam $\Omega = R^n$ ou um cubo em R^n, $\alpha > 0$ e $f \in L^1_{loc}(\Omega)$.*

As quatro afirmações abaixo são equivalentes:

i) existem uma constante $A_1 > 0$ e funções $\{f_\nu : |\nu| < \alpha\}$ tais que $f_0 := f$ e para cada $|\nu| < \alpha$ e para quase todo $x \in \Omega$,

$$f_\nu(y) = \sum_{|\mu+\nu|<\alpha} f_{\mu+\nu}(x)\frac{(y-x)^\mu}{\mu!} + R_\nu(x,y)$$

com $|R_\nu(x,y)| \leq A_1|y-x|^{\alpha-|\nu|}$ para quase todo $y \in \Omega$;

ii) existe uma constante $A_2 > 0$ tal que para quase todo $x \in \Omega$, existe um polinômio π_x de grau menor que α com

$$|f(y) - \pi_x(y)| \leq A_2|x-y|^\alpha \qquad \textit{para quase todo } x \textit{ e } x+kh \in \Omega\,;$$

iii) para k o menor inteiro $\geq \alpha$, existe uma constante $A_3 > 0$ tal que

$$|\Delta^k_h f(x)| \leq A_3|h|^\alpha \qquad \textit{para quase todo } x \in \Omega_{k,h}\,;$$

iv) $f^\flat_\alpha \in L^\infty(\Omega)$.

Além disso, $A := \min\{A_1, A_2, A_3\}$ é uma seminorma equivalente a $\|f^\flat_\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Demonstração . Primeiramente mostraremos a implicação $i) \Rightarrow ii)$. Afirmamos que tomando $\nu = 0$ em $i)$ segue $ii)$. Para verificar isto definimos, formalmente, para quase todo $x \in \Omega$, polinômio de grau menor que α

$$\pi_x(y) := \sum_{|\mu|<\alpha} f_\mu(x)\frac{(y-x)^\mu}{\mu!} \quad \text{para quase todo } y \in \Omega\,.$$

Como estamos considerando $\nu = 0$ no item $i)$ e utilizando a relação acima, obtemos

$$f(y) = f_0(y) = \sum_{|\mu|<\alpha} f_\mu(x)\frac{(y-x)^\mu}{\mu!} + R_0(x,y) = \pi_x(y) + R_0(x,y)\,.$$

Agora utilizamos a outra condição em $i)$ para obter

$$|f(y) - \pi_x(y)| = |R_0(x,y)| \leq A_1|y-x|^\alpha \quad \text{para quase todo } y \in \Omega\,.$$

Isto é exatamente $ii)$ com $A_2 := A_1$.

Na parte $ii) \Rightarrow iii)$ consideramos x e $x + kh \in \Omega_{k,h}$. Se $\pi_x(x)$ é um polinômio em x com grau $< k$ então $\Delta_h^k \pi_x(x) = 0$ por (**2.52**). Para $y_j := x + jh$ onde $j = 0, \cdots, k$, (**2.51**) item $ii)$ e a propriedade de linearidade do operador Δ_h^k fornecem

$$
\begin{aligned}
|\Delta_h^k f(x)| &= |\Delta_h^k (f - \pi_x)(x)| \leq 2^k \max_{0 \leq j \leq k} |f(x + ij) - \pi_x(x + ij)| = 2^k \max_{0 \leq j \leq k} |f(y_j) - \pi_x(y_j)| \\
&\leq 2^k A_2 \max_{0 \leq j \leq k} |jh|^\alpha \leq 2^k k^\alpha A_2 |h|^\alpha .
\end{aligned}
$$

Assim, chegamos ao item $iii)$ com $A_3 := 2^k k^\alpha A_2$.

Agora será a vez de $iii) \Rightarrow iv)$. Se vale $iii)$ então, por (**4.21**),

$$
\omega_k(f, t)_\infty = \sup_{|h| \leq t} \|\Delta_h^k f\|_{L^p(\Omega_{k,h})} \leq \sup_{|h| \leq t} (A_3 |h|^\alpha) \leq A_3 t^\alpha \quad \text{para todo } t > 0 .
$$

Donde,

$$
|f|_{B_\infty^{\alpha,\infty}} = \sup_{t > 0} t^{-\alpha} \omega_k(f, t)_\infty \leq A_3 .
$$

Com o **Lema 4.5**, existem uma constante $c_0 > 0$ e um polinômio $\pi \in P_{(\alpha)}$ tais que

$$
\frac{1}{|Q|} \int_Q |f - \pi| \leq \|f - \pi\|_{L^\infty(Q)} \leq c_0 |Q|^{\alpha/n} |f|_{B_\infty^{\alpha,\infty}(\Omega)} \leq c_0 A_3 |Q|^{\alpha/n} \quad \text{para todo } Q \subset R^n .
$$

Dividindo a desigualdade acima por $|Q|^{\alpha/n}$ e tomando o ínfimo sobre $\pi \in P_{(\alpha)}$ e o supremo sobre cubos Q tais que $\Omega \supset Q \ni x$, pelo **Lema 2.2** item $ii)$ com constante c_1, segue $c_1 f_\alpha^\flat(x) \leq c_0 A_3$ para todo x em Ω. Portanto, $f_\alpha^\flat \in L^\infty(\Omega)$ e

$$
\|f_\alpha^\flat\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{c_0}{c_1} A_3 .
$$

Resta mostrar a implicação $iv) \Rightarrow i)$. Se vale $iv)$ então $f_\alpha^\flat$ é finito quase sempre em Ω. Pelo **Lema 3.9**, as derivadas de Peano de f, denotada por $D_\nu f(x) =: f_\nu(x)$, existem para quase todo x em Ω. Fixemos $x \in \Omega$ onde exista o limite (**3.34**). Seja $y \in \Omega$ onde $f_\alpha^\flat(y)$ é finito e $x \in Q$ tal que $D_\nu f(x) = \lim_{Q \downarrow \{x\}} D^\nu(\mathcal{P}_Q^\flat)(x)$ onde $|\nu| = k$. Pelo **Lema 3.9** as derivadas de Peano coincide com as derivadas fracas $D^\nu f$.

Nesta condições,

$$
D^\nu(P_Q^\flat f)(y) := \sum_{|\mu + \nu| < \alpha} D^{\mu+\nu}(P_Q^\flat f)(x) \frac{(y - x)^\mu}{\mu!} .
$$

Definindo, formalmente,

$$
f_\nu(y) := \sum_{|\mu + \nu| < \alpha} f_{\mu+\nu}(x) \frac{(y - x)^\mu}{\mu!} + R_\nu(x, y)
$$

segue

$$
\begin{aligned}
|R_\nu(x, y)| &= \left| f_\nu(y) - \sum_{|\mu + \nu| < \alpha} f_{\mu+\nu}(x) \frac{(y - x)^\mu}{\mu!} \right| \leq |D_\nu f(y) - D^\nu(P_Q^\flat f)(y)| \\
&\quad + \sum_{|\mu + \nu| < \alpha} |D^{\mu+\nu}(P_Q^\flat f)(x) - D_{\mu+\nu} f(x)| \frac{|(y - x)^\mu|}{\mu!}
\end{aligned}
$$

para o menor cubo Q_1 tal que $\Omega \supset Q_1 \ni x, y$. Nesse cubo Q_1 tem-se $|x-y| > \frac{\text{lado de } Q_1}{2}$, isto é, $|Q_1|^{1/n} < 2|x-y|$; outra relação é a conhecida $|x-y| \leq$ diâmetro de $Q_1 = |Q_1|^{1/n}\sqrt{n}$.

Usaremos a desigualdade $|\mu+\nu| \geq |\nu| - |\,mu|$. Prosseguimos observando a primeira desigualdade no **Lema 3.9** para obter

$$\begin{aligned}
|R_\nu(x,y)| &\leq c_0 f^\flat_\alpha(y)|Q_1|^{\frac{\alpha-|\nu|}{n}} + \sum_{|\mu+\nu|<\alpha} c_1 f^\flat_\alpha(x)\, |Q_1|^{\frac{\alpha-|\mu+\nu|}{n}} \frac{|(y-x)^\mu|}{\mu!} \\
&\leq c_0 f^\flat_\alpha(y)|Q_1|^{\frac{\alpha-|\nu|}{n}} + c_1 f^\flat_\alpha(x) \sum_{|\mu+\nu|<\alpha} |Q_1|^{\frac{\alpha-|\mu+\nu|}{n}} \cdot |Q_1|^{\frac{|\mu|}{n}} \frac{n^{|\mu|/2}}{\mu!} \\
&\leq \max\left\{c_0, c_1 \sum_{|\mu+\nu|<\alpha} \frac{n^{|\mu|/2}}{\mu!}\right\} [f^\flat_\alpha(y) + f^\flat_\alpha(x)]|Q_1|^{\frac{\alpha-|\nu|}{n}} \\
&\leq \max\left\{c_0, c_1 \sum_{|\mu+\nu|<\alpha} \frac{n^{|\mu|/2}}{\mu!}\right\} 2\|f^\flat_\alpha\|_{L^\infty(\Omega)} 2^{\alpha-|\nu|}|x-y|^{\alpha-|\nu|}.
\end{aligned}$$

Assim, vale $i)$ com $A_1 := \max\left\{c_0, c_1 \sum_{|\mu+\nu|<\alpha} \frac{n^{|\mu|/2}}{\mu!}\right\} 2^{1+\alpha-|\nu|}\|f^\flat_\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}$.

As afirmação de que $A := \min\{A_1, A_2, A_3\}$ é equivalente a $\|f^\flat_\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}$ segue das definições de A_1, A_2 e A_3 obtidas durante esta demonstração. ■

Agora podemos definir o *espaço de Lipschitz, Lip* $\alpha(\Omega)$.

Adotamos o item $i)$ do **Teorema 4.7** como sendo a definição do *espaço de Lipschitz, Lip* $\alpha(\Omega)$; ou, simplesmente, *Lip* α. A *seminorma* em *Lip* α é dada por

$$|f|_{Lip\ \alpha} := \inf\{A_1 : A_1 \text{ satisfaz } i \text{ do } \textbf{Teorema 4.7}\}.$$

A *norma* em *Lip* α será $\|f\|_{Lip\ \alpha} := \|f\|_{L^\infty} + |f|_{Lip\ \alpha}$.

Demonstração do Teorema 4.6. Mostraremos as inclusões $\mathcal{C}^\alpha_\infty(\Omega) \subseteq Lip\ \alpha(\Omega)$ e $\mathcal{C}^\alpha_\infty(\Omega) \supseteq Lip\ \alpha(\Omega)$. Consideraremos os elementos da demonstração do **Teorema 4.7**.

Seja $f \in \mathcal{C}^\alpha_\infty$. Pela definição de $\mathcal{C}^\alpha_\infty$ tem-se f e $f^\flat_\alpha \in L^\infty(\Omega)$. Pelo item $iv)$ do **Teorema 4.7** implica a definição de *Lip* α, dada por $i)$.

Logo $f \in Lip\ \alpha$; e utilizando $A_1 := c\|f^\flat_\alpha|_{L^\infty(\Omega)}$ da implicação $iv) \Rightarrow i)$ temos

$$\|f\|_{Lip\ \alpha} = \|f\|_{L^\infty(\Omega)} + |f|_{Lip\ \alpha} \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)} + c\|f^\flat_\alpha\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \max\{1, c\}\|f\|_{\mathcal{C}^\alpha_\infty} < \infty.$$

Por outro lado, suponhamos $f \in Lip\ \alpha$. Isto implica $f \in L^\infty(\Omega)$. A parte $i) \Rightarrow iv)$ do **Teorema 4.7** diz que $f^\flat_\alpha \in L^\infty(\Omega)$. Assim, $f \in \mathcal{C}^\alpha_\infty$.

Utilizando $A_1 := c\|f^\flat_\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}$ segue

$$\|f\|_{\mathcal{C}^\alpha_\infty} = \|f\|_{L^\infty(\Omega)} + \|f^\flat_\alpha\|_{L^\infty(\Omega)} = \|f\|_{L^\infty(\Omega)} + \frac{A_1}{c}$$

Tomando o ínfimo dos A_1 satisfazendo $i)$ do **Teorema 4.7**, segue

$$c\|f\|_{\mathcal{C}^\alpha_\infty} = c\|f\|_{L^\infty(\Omega)} + A_1 \leq c\|f\|_{L^\infty(\Omega)} + |f|_{Lip\ \alpha} \leq \max\{c, 1\}\|f\|_{Lip\ \alpha}$$

Donde
$$\|f\|_{C^\alpha_\infty} \leq \frac{\max\{c,1\}}{c}\|f\|_{Lip\ \alpha}. \quad \blacksquare$$

Seja Ω todo o R^n ou um cubo de R^n. Quando $\alpha > 0$ não é inteiro tem-se $C^\alpha_\infty(\Omega) = \mathcal{C}^\alpha_\infty(\Omega)$. Portanto, pelos **Teoremas 4.4** e **4.6**, temos $B^{\alpha,\infty}_\infty(\Omega) = Lip\ \alpha(\Omega)$.

4.4 A Imersão $C^\alpha_p(\Omega) \hookrightarrow C^\beta_p(\Omega)$

Nas seções anteriores acabamos de relacionar $\mathcal{C}^\alpha_p$ e C^α_p com os espaços de Sobolev, Besov e Lipschitz. No **Corolário 2.6** já vimos que vale a imersão $\mathcal{C}^\alpha_p \hookrightarrow C^\alpha_p$.

Podemos perguntar se existe alguma relação entre os próprios espaços $\mathcal{C}^\alpha_p$ e C^α_p. Temos duas respostas: uma afirmativa e outra negativa.

O primeiro resultado relaciona $\mathcal{C}^\alpha_p(R^n)$ para diferentes valores de α e mantendo p fixo. Mais precisamente, vale a imersão $\mathcal{C}^\alpha_p(R^n) \hookrightarrow \mathcal{C}^\beta_p(R^n)$ para $0 < \beta \leq \alpha$ e $1 \leq p \leq \infty$. A demonstração desta imersão não vale para Ω = cubo de R^n nem para $\mathcal{C}^\alpha_p(\Omega)$. A generalização da imersão acima será o objetivo do **Capítulo 6**.

O seguinte resultado é uma conseqüência do operador maximal M de Hardy-Littlewood ser *tipo* (p,p) para $1 < p \leq \infty$ e o operador $M_q(g) := [M(|g|)]^{1/q}$ ser *tipo* $(1,1)$. Estes fatos estão provadas nas **seções 1.6** e **3.2**, respectivamente.

Teorema 4.8 . *Seja $\Omega = R^n$. Para $0 < \beta \leq \alpha$ e $1 \leq p \leq \infty$ existe uma constante c independente de f tal que*
$$\|f\|_{C^\beta_p(R^n)} \ \leq \ c\ \|f\|_{C^\alpha_p(R^n)}.$$

A demonstração do teorema acima não serve para provar a imersão $\mathcal{C}^\alpha_p(R^n) \hookrightarrow \mathcal{C}^\beta_p(R^n)$ pois esta proposição não podemos utilizar a **Proposição 3.4** pois não vale para α inteiro.

Demonstração do Teorema 4.8. Seja $f \in C^\beta_p(R^n)$ onde $0 < \beta \leq \alpha$ e $1 \leq p \leq \infty$. Se $\beta = \alpha$ nada temos a provar. Se $0 < \beta < \alpha$, definimos um parâmetro auxiliar $\theta := \frac{\beta}{\alpha} < 1$ e utilizaremos a *desigualdade de Hölder* com expoentes conjugados $\frac{1}{\theta}$ e $\frac{1}{1-\theta}$.

Veremos agora o caso $p > 1$ e depois o caso $p = 1$.

No que segue, a primeira desigualdade provém da **Proposição 2.4** com $j := [\alpha] \geq [\beta]$ e constante c_0 dependendo de j e β e onde $(P_j)_Q f$ é o operador projeção de grau j; a última desigualdade segue de (**2.20**) e propriedades do supremo. Para todo x de R^n tem-se

$$\begin{aligned}
f^\sharp_\beta(x) &\leq c_2 \sup_{\Omega\supset Q\ni x} \frac{1}{|Q|^{1+\frac{\beta}{n}}} \int_Q |f-(P_j)_Q f| \\
&= c_2 \sup_{\Omega\supset Q\ni x} \left\{ \int_Q \frac{|f-(P_j)_Q f|^{1-\theta}}{|Q|^{1-\theta}} \cdot \frac{|f-(P_j)_Q f|^{\theta}}{|Q|^{(1+\frac{\beta}{n\theta})\theta}} \right\} \\
&\leq c_2 \sup_{\Omega\supset Q\ni x} \left\{ \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f-(P_j)_Q f| \right)^{1-\theta} \cdot \left(\frac{1}{|Q|^{1+\frac{\alpha}{n}}} \int_Q |f-(P_j)_Q f| \right)^{\theta} \right\} \\
&\leq c_2 \left(\sup_{\Omega\supset Q\ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f-(P_j)_Q f| \right)^{1-\theta} \cdot [f^\sharp_\alpha(x)]^\theta .
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Para continuar estimando (**4.27**) precisamos de duas observações.

A primeira segue da **Proposição 2.1** item *i*) com constante $c_0 > 0$ dependendo de j,

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|}\int_Q |f-(P_j)_Q f| &\le \frac{1}{|Q|}\int_Q |f| + |(P_j)_Q f| \le \frac{1}{|Q|}\int_Q |f| + \|(P_j)_Q f\|_{L^\infty(Q)} \\ &\le (1+c_0)\frac{1}{|Q|}\int_Q |f|, \quad \text{para todo cubo } Q\subset\Omega .\end{aligned}$$

A segunda merece mais detalhes. Dados dois números não negativos u e v e $0\le\theta\le 1$, tem-se[53]

$$u^{1-\theta}\, v^{\theta} \;\le\; u \;+\; v .$$

De fato, se $u\le v$ então $u^{1-\theta}\le v^{1-\theta}$; donde, $u^{1-\theta}v^{\theta}\le v^{1-\theta}v^{\theta} = v \le u+v$. Caso contrário, se $v<u$ então $v^{\theta}\le u^{\theta}$; donde, $u^{1-\theta}v^{\theta}\le u^{1-\theta}u^{\theta} = u\le u+v$.

Prosseguimos com (**4.27**) utilizando as duas observações acima.

$$\begin{aligned} f_\beta^\sharp(x) &\le c_2[(1+c_0)Mf(x)]^{1-\theta}.[f_\alpha^\sharp(x)]^{\theta} \le c_2[(1+c_0)Mf(x)+f_\alpha^\sharp(x)] \\ &\le c_2(1+c_0)[Mf(x)+f_\alpha^\sharp(x)] \end{aligned}$$

para todo $x\in\Omega$, M é o operador maximal de Hardy-Littlewood.

Agora utilizamos a limitação de M em $L^p(\Omega)$ para $p>1$, com constante c_1, para obter

$$\|f_\beta^\sharp\|_{L^p(\Omega)} \le c_2(1+c_0)[\|Mf\|_{L^p(\Omega)} + \|f_\alpha^\sharp\|_{L^p(\Omega)}] \le c_2(1+c_0)[c_1\|f\|_{L^p(\Omega)} + |f|_{C_p^\alpha}]$$

Assim,

$$\begin{aligned}\|f\|_{C_p^\beta} &= \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|f_\beta^\sharp\|_{L^p(\Omega)} \\ &\le \|f\|_{L^p(\Omega)} + c_2(1+c_0)c_1\|f\|_{L^p(\Omega)} + c_2(1+c_0)|f|_{C_p^\alpha} \\ &\le \max\{1+c_1c_2(1+c_0), c_2(1+c_0)\}\|f\|_{C_p^\alpha} .\end{aligned}$$

No caso $p=1$ não podemos utilizar a limitação de M em $L^1(\Omega)$. O argumento para contornar esse problema é utilizar a **Proposição 3.4** onde $q\le 1$. Para isso, escolhemos $q := \left(1+\frac{\beta}{n}\right)^{-1} < 1$ e $\mathcal{P}_Q f$ um polinômio em $\mathcal{A}(f)$ de melhor aproximação de f em $L^q_{loc}(\Omega)$, isto é, $\mathcal{P}_Q f$ satisfaz $\|f-\mathcal{P}_Q f\|_{L^q(Q)} = \inf_{\pi\in P_{[\alpha]}} \|f-\pi\|_{L^q(Q)}$. Em particular, para o polinômio nulo $\pi\equiv 0\in P_{[\alpha]}$, vale

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f-\mathcal{P}_Q f|^q \le \frac{1}{|Q|}\int_Q |f|^q . \tag{4.28}$$

Seja θ do caso anterior e $j=[\alpha]\le[\beta]$. Seguindo passos análogos para obter (**4.27**), utilizando a **Proposição 3.6** com constante c_1, a relação $(u+v)^q\le 2^q(u^q+v^q)$ válido para u, v e $q>0$ visto

[53]Em Economia, uma função $f(u,v)=\gamma u^{1-\theta}v^{\theta}$ onde γ é uma constante, u, $v\ge 0$ e $0\le\theta\le 1$ é conhecida como *Função de Cobb-Douglas*, conforme Varian [1].

na seção **1.1**, (**4.28**) e parte de (**3.11**), seguem

$$
\begin{aligned}
F^{\sharp}_{\beta,q}(x) &\leq c_1 F_{j,q}(x) \leq c_1 \sup_{\Omega \supset Q \ni x} \left(\frac{1}{|Q|^{1+\frac{\theta\alpha q}{n}}} \int_Q |f - \mathcal{P}_Q f|^q \right)^{1/q} \\
&= c_1 \sup_{\Omega \supset Q \ni x} \left(\int_Q \frac{|f - \mathcal{P}_Q f|^{q(1-\theta)}}{|Q|^{1-\theta}} \cdot \frac{|f - \mathcal{P}_Q f|^{q\theta}}{|Q|^{(1+\frac{\alpha}{n}q)\theta}} \right)^{1/q} \\
&\leq c_1 \sup_{\Omega \supset Q \ni x} \left\{ \left(\int_Q \frac{|f - \mathcal{P}_Q f|^q}{|Q|} \right)^{1-\theta} \cdot \left(\int_Q \frac{|f - \mathcal{P}_Q f|^q}{|Q|^{1+\frac{\alpha}{n}q}} \right)^{\theta} \right\}^{1/q} \\
&\leq c_1 \left[\sup_{\Omega \supset Q \ni x} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f - \mathcal{P}_Q f|^q \right)^{1/q} \right]^{1-\theta} \cdot \left[F^{\sharp}_{\alpha,q}(x) \right]^{\theta} \\
&\leq c_1 \left[\sup_{\Omega \supset Q \ni x} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f|^q \right)^{1/q} \right]^{1-\theta} \cdot \left[F^{\sharp}_{\alpha,q}(x) \right]^{\theta} \\
&\leq c_1 [M_q f(x) \ + \ f^{\sharp}_{\alpha,q}(x)] \\
&\leq c_1 [M_q f(x) + f^{\sharp}_{\alpha}(x)]
\end{aligned}
$$

onde $M_q g := [M(|g|^q)]^{1/q}$ e M é a função maximal de Hardy-Littlewood.

Tomando a norma em $L^1(\Omega)$ na relação acima e observando que M_q é limitado em $L^1(\Omega)$ (conforme foi mostrado em (**3.12**)) com constante c_2, temos

$$
\begin{aligned}
\|F^{\sharp}_{\beta,q}\|_{L^1(\Omega)} &\leq c_1(\|M_q f\|_{L^1(\Omega)} + \|f^{\sharp}_{\alpha}\|_{L^1(\Omega)}) \leq c_1(c_2\|f\|_{L^1(\Omega)} + \|f^{\sharp}_{\alpha}\|_{L^1(\Omega)}) \\
&\leq c_1 \max\{c_2, 1\} \|f\|_{C^{\alpha}_1} < \infty .
\end{aligned}
$$

Assim, $F^{\sharp}_{\beta,q} \in L^1(\Omega)$.

Por outro lado, (**3.3**) com constante c_3 e **Teorema 3.3** com constante c_4 fornecem

$$
c_3 F^{\sharp}_{\beta} \leq F^{\sharp}_{\beta,1} \leq c_4 M_{\sigma}(F^{\sharp}_{\beta,q}), \quad \text{onde } \sigma := \left(1 + \tfrac{\beta}{n}\right)^{-1}.
$$

Tomando a norma $L^1(\Omega)$ na relação acima e observando que o operador M_{σ} é limitado em $L^1(\Omega)$ (conforme foi mostrado em (**3.12**)) com constante c_5 seguem

$$
\|f^{\sharp}_{\beta}\|_{L^1(\Omega)} \leq \frac{c_4}{c_3} \|M_{\sigma}(F^{\sharp}_{\beta,q})\|_{L^1(\Omega)} \leq \frac{c_4}{c_3} c_5 \|F^{\sharp}_{\beta,q}\|_{L^1(\Omega)} \leq \frac{c_3 c_5 c_1}{c_4} \max\{c_2, 1\} \|f\|_{C^{\alpha}_1} .
$$

Isto completa o teorema nos casos $1 < p \leq \infty$ e $p = 1$. ■

4.5 O Espaço $C^0_p(R^n)$ com $1 \leq p \leq \infty$

Nesta seção motivamos a definição do espaço $C^0_p(R^n)$ para $1 < p < \infty$ através de uma relação de equivalência dada no seguinte

Teorema 4.9 .[54] *Se* $1 < p < \infty$ *e* f *satisfaz* $\lim_{N\to\infty}(Mf)^*(N) = 0$ *onde* M *é o operador maximal de Hardy-Littlewood. Então*

$$\frac{\log 2}{p8^{n+1}}\|f\|_{L^p(R^n)} \le \|f_0^\sharp\|_{L^p(R^n)} \le 4^{1+n}\left(\frac{p}{p-1}\right)\|f\|_{L^p(R^n)}.$$

Para $1 < p < \infty$ definimos $C_p^0 := L^p(R^n)$ com norma $\|f\|_{C_p^0} := \|f\|_{L^p(R^n)}$.

Nos casos extremos $p = 1$ e ∞ definimos $C_1^0 := L^1(R^n)$ e $C_\infty^0 := BM0$[55] com normas $\|f\|_{C_1^0} := \|f\|_{L^1(R^n)}$ e $\|f\|_{C_\infty^0} := \|f\|_{BMO} = \|f_0^\sharp\|_{L^\infty(R^n)}$, respectivamente.

Demonstração do Teorema 4.9. Lembramos que a notação no caso $k = [\alpha] = 0$ é $P_Q f := f_Q := \frac{1}{|Q|}\int_Q f$, conforme (**1.9**) e (**2.10**).

A segunda desigualdade do teorema segue aplicando a norma de $L^p(R^n)$ em

$$f_0^\sharp(x) = \sup_{R^n\supset Q\ni x}\frac{1}{|Q|}\int_Q |f - f_Q| \le \sup_{R^n\supset Q\ni x}\frac{1}{|Q|}\int_Q |f| + \sup_{R^n\supset Q\ni x}|f_Q| \le 2Mf(x)$$

e a seguir utilizando a limitação, em $L^p(R^n)$, do operador M (dado no **Teorema 1.25**), ou seja

$$\|f_0^\sharp\|_{L^p(R^n)} \le 2\|Mf\|_{L^p(R^n)} \le 2.2^{1+2n}\left(\frac{p}{p-1}\right)\|f\|_{L^p(R^n)}.$$

(Observamos que, pela limitação de M em $L^\infty(R^n)$ e pelo **Teorema 1.25**, tem-se $\|f_0^\sharp\|_{L^\infty(R^n)} \le 2\|Mf\|_{L^\infty(R^n)} \le 2\|f\|_{L^\infty(R^n)}$.) Mais adiante veremos porque a finitude de p é essencial.

Para obter a primeira desigualdade do teorema definimos um conjunto auxiliar.

Para cada $s > 0$

$$E := E_s := \{x \in R^n : Mf(x) > (Mf)^*(2s)\}\bigcup\{x \in R^n : f_0^\sharp(x) > (f_0^\sharp)^*(2s)\}.$$

Portanto, E é um conjunto aberto pois é a união de dois conjuntos abertos e $|E| \le 2s + 2s = 4s$, pela **Proposição 1.13**. Estas são as hipóteses do lema de Vitali para cubos diádicos (**Teorema 1.28**); donde, existe uma família de cubos maximais enumeráveis $\{Q_j : j \in N\}$ satisfazendo $E \subset \bigcup_j Q_j$, $Q_j \bigcap E^c \neq \emptyset$ e $\sum_j |Q_j| \le 2^n|E|$.

Decompomos a função f como soma das funções: $g := \sum_j \left(f - f_{Q_j}\right)\chi_{Q_j}$ e

$$h := f - g \;=\; f - \sum_j f\chi_{Q_j} + \sum_j f_{Q_j}\chi_{Q_j} \;=\; f - f\chi_{\bigcup_j Q_j} + \sum_j f_{Q_j}\chi_{Q_j}$$

$$= \; f\chi_{\left(\bigcup_j Q_j\right)^c} + \sum_j f_{Q_j}\chi_{Q_j}$$

Observamos que, em cada ponto $x \in R^n$, tem-se $f\chi_{\left(\bigcup_j Q_j\right)^c}(x) = 0$ ou $\sum_j f_{Q_j}\chi_{Q_j}(x) = 0$.

Estimaremos as normas de g e h dadas acima.

Fixemos o cubo Q_j. Pela definição (**2.20**), $\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f - f_{Q_j}| \le f_0^\sharp(u)$ para todo $u \in Q_j$. Desde que $Q_j \bigcap E^c$ é não vazio, existe, digamos, x_{0j} nessa interseção. Ou seja, $x_{0j} \in Q_j$ e $x_{0j} \notin E$. Assim,

$$\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} |f - f_{Q_j}| \;\le\; f_0^\sharp(x_{0j}) \;\le\; (f_0^\sharp)^*(2s).$$

[54]Este teorema é devido a Fefferman-Stein [1] e está generalizado em Bennett-Sharpley [1].

[55]Sugerimos Carleson [1].

Esse argumento funciona para obter outro resultado. Vejamos. Por definição temos, $|f_{Q_j}| \leq Mf(u)$ para todo $u \in Q_j$. Seja x_{0j} o mesmo escolhido acima. Portanto,

$$|f_{Q_j}| \ \leq \ Mf(x_{0j}) \ \leq \ (Mf)^*(2s).$$

Um terceiro resultado seria o seguinte. Em (**1.39**) obteve-se $|f(u)| \leq Mf(u)$ para quase todo $u \in R^n$. Logo, $|f\chi_{E^c}(u)| \leq M(f\chi_{E^c})(u) \leq (Mf)^*(2s)$ para quase todo $u \in E^c$. Assim, $\|f\chi_{E^c}\|_{L^\infty(R^n)} \leq (Mf)^*(2s)$.

Logo, pelos resultados dos três últimos parágrafos e propriedades da partição Q_j,

$$\begin{cases} \|g\|_{L^1(R^n)} \leq \sum_j \int_{Q_j} |f - f_{Q_j}| \leq \sum_j |Q_j|(f_0^\sharp)^*(2s) \leq 2^n|E|(f_0^\sharp)^*(2s) \leq 2^{n+2}s(f_0^\sharp)^*(2s). \\ \\ \|h\|_{L^\infty(R^n)} = \max\{\sup_j |f_{Q_j}|, \|f\chi_{E^c}\|_{L^\infty(R^n)}\} \leq (Mf)^*(2s). \end{cases}$$

Pela subaditividade de M tem-se $Mf(x) = M(g+h)(x) \leq Mg(x) + Mh(x)$, para todo $x \in R^n$. Pela **Proposição 1.15** item i tem-se $(Mf)^*(s) = [M(g+h)]^*(s) \leq (Mg)^*(s/2) + (Mh)^*(s/2)$ para todo $s \geq 0$. Pelo **Teorema 1.23**, **Corolário 1.14** e sendo M um operador *tipo forte* (∞, ∞) obtemos, sucessivamente,

$$\begin{aligned} (Mf)^*(s) \ &\leq \ (Mg)^*(s/2) + (Mh)^*(s/2) \leq \frac{4^n}{s/2}\|g\|_{L^1(\Omega)} + (Mh)^*(0) \\ &\leq \ \frac{2^{1+2n}}{s}\|g\|_{L^1(R^n)} + \|Mh\|_{L^\infty(R^n)} \leq \frac{2^{1+2n}}{s}\|g\|_{L^1(R^n)} + \|h\|_{L^\infty(R^n)} \\ &\leq \ \frac{2^{1+2n}}{s}2^{n+2}s(f_0^\sharp)^*(2s) + (Mf)^*(2s). \end{aligned}$$

Fixados dois números reais quaisquer $N > t > 0$, integramos a desigualdade acima no intervalo $[t/2, N]$ com peso $1/s$ e a seguir fazemos a mudança de variáveis $s \mapsto 2s$ para obter

$$\begin{aligned} \int_{t/2}^N (Mf)^*(s)\frac{ds}{s} \ &\leq \ 2^{3n+3}\int_{t/2}^N (f_0^\sharp)^*(2s)\frac{ds}{s} + \int_{t/2}^N (Mf)^*(2s)\frac{ds}{s} \\ &= \ 2^{3n+3}\int_t^{2N} (f_0^\sharp)^*(s)\frac{ds}{s} + \int_t^{2N} (Mf)^*(s)\frac{ds}{s} \\ &\leq \ 2^{3n+3}\int_t^{\infty} (f_0^\sharp)^*(s)\frac{ds}{s} + \int_t^{2N} (Mf)^*(s)\frac{ds}{s}. \end{aligned}$$

Subtraindo o número finito $\int_t^N (Mf)^*(s)\frac{ds}{s}$ (de fato: sendo $t < s$ temos $(Mf)^*(s) \leq (Mf)^*(t)$, donde $\int_t^N (Mf)^*(s)\frac{ds}{s} \leq (Mf)^*(t)\int_t^N \frac{ds}{s} = (Mf)^*(t)\log\frac{N}{t} < \infty$) em ambos os lados da relação acima e utilizando o fato de $(Mf)^*$ ser não crescente, obtemos

$$\begin{aligned} (Mf)^*(t)\log 2 \ &= \ (Mf)^*(t)\int_{t/2}^t \frac{ds}{s} \leq \int_{t/2}^t (Mf)^*(s)\frac{ds}{s} \\ &\leq \ 2^{3n+3}\int_t^{\infty} (f_0^\sharp)^*(s)\frac{ds}{s} + \int_N^{2N} (Mf)^*(s)\frac{ds}{s} \\ &\leq \ 2^{3n+3}\int_t^{\infty} (f_0^\sharp)^*(s)\frac{ds}{s} + (Mf)^*(N)\ln\, 2. \end{aligned}$$

Fazendo $N \to \infty$ na desigualdade acima e utilizando a hipótese $(Mf)^*(N) \to 0$ segue

$$(Mf)^*(t) \leq \frac{2^{3n+3}}{\ln 2} \int_t^\infty (f_0^\sharp)^*(s) \frac{ds}{s} \quad \text{para todo } t > 0 \,.$$

Calculando a norma em $L^p(R^+)$ na relação acima e utilizando a *desigualdade de Hardy* item *iii)* (**Proposição 1.3**) com $p = 1$ e $u = r = 0$ seguem

$$\begin{aligned}
\|(Mf)^*\|_{L^p(R^+)} &\leq \frac{2^{3n+3}}{\ln 2} \left[\int_0^\infty \left(\int_t^\infty (f_0^\sharp)^*(s) \frac{ds}{s} \right)^p \right]^{1/p} \\
&\leq \frac{2^{3n+3}}{\ln 2} \left[\int_0^\infty |(f_0^\sharp)^*(s)|^p ds \right]^{1/p} \qquad (4.29) \\
&= \frac{2^{3n+3}}{\ln 2} \|(f_0^\sharp)^*\|_{L^p(R^+)} \,.
\end{aligned}$$

Notamos que a finitude de p é essencial para utilizar a *desigualdade de Hardy* em (**4.29**).

Sendo $|f| \leq Mf$ quase sempre, utilizamos a equimensurabilidade de Mf e $(Mf)^*$ (conforme **subseção 1.5.2**) e o **Corolário 1.14** para obter

$$\|f\|_{L^p(R^n)} \leq \|Mf\|_{L^p(R^n)} = \|(Mf)^*\|_{L^p(R^+)} \,.$$

Este resultado junto com (**4.29**) e a equimensurabilidade de $f_0^\sharp$ e $(f_0^\sharp)^*$ finalizam o teorema. ■

Capítulo 5

Imersões no Espaço de Besov

No capítulo anterior relacionamos os espaços $C_\infty^\alpha(\Omega)$ e os espaços de Besov $B_\infty^{\alpha,\infty}(\Omega)$ e verificamos a igualdade $C_\infty^\alpha(\Omega) = B_\infty^{\alpha,\infty}(\Omega)$ com normas equivalentes e $\alpha > 0$.

Neste capítulo relacionaremos os espaços $C_p^\alpha(\Omega)$ e $C_p^\alpha(\Omega)$ com os espaços de Besov $B_p^{\alpha,p}(\Omega)$. O principal resultado deste capítulo é o **Teorema 5.1** onde descrevemos as imersões $B_p^{\alpha,p}(R^n) \hookrightarrow C_p^\alpha(R^n) \hookrightarrow B_p^{\alpha,\infty}(R^n)$ para $1 \leq p \leq \infty$ e $\alpha > 0$.

A otimalidade da imersão $B_p^{\alpha,p}(R^n) \hookrightarrow C_p^\alpha(R^n)$ será dada através da construção de uma função f pertencente a $B_p^{\alpha,q}(R^n)$ para cada q satisfazendo $p < q \leq \infty$, tal que $f \notin C_p^\alpha(R^n)$. (Também $C_p^\alpha(\Omega)$ não pode ser espaço de Besov para p finito; mais precisamente, em DeVore-Sharpley [1], é apresentado uma função $f \in C_p^\alpha(R^n)$ mas $f \notin B_p^{\alpha,q}(R^n)$ para $\alpha > 0, 1 \leq p \leq \infty$ e $1 \leq q < \infty$.)

Conseqüentemente, pelos resultados comentados nos dois parágrafos acima segue que $C_p^\alpha(\Omega)$ é espaço de Besov $\Longleftrightarrow p = \infty$.

Neste capítulo consideramos $\Omega = R^n$. Argumentos similares funcionam para cubos em R^n. Resultados para outros domínios são apresentados em DeVore-Sharpley [1].

5.1 As Imersões $B_p^{\alpha,p}(R^n) \hookrightarrow C_p^\alpha(R^n) \hookrightarrow B_p^{\alpha,\infty}(R^n)$

O resultado principal desta seção é

Teorema 5.1 . *Se $1 \leq p \leq \infty$ e $\alpha > 0$ então $B_p^{\alpha,p}(R^n) \hookrightarrow C_p^\alpha(R^n) \hookrightarrow B_p^{\alpha,\infty}(R^n)$.*

A imersão dado pelo teorema acima é a melhor possível no espaço de Besov.

Veremos isso na forma de um lema apresentado na **subseção 5.1.1** a seguir.

Antes de demonstrar o teorema acima, vejamos algumas definições e suas conseqüências.

Para $1 \leq p < \infty$ definimos uma função de x,

$$E_r(f,\rho,x)_p := \inf_{\pi \in P_{r-1}} \left(\int_{Q_\rho(x)} |f - \pi|^p \right)^{1/p} \tag{5.1}$$

onde $Q_\rho(x)$ é cubo centrado em x com lado de comprimento ρ; e a sua norma em $L^p(R^n)$ é dada por

$$E_r(f,\rho)_p := \|E_r(f,\rho,.)_p\|_{L^p(R^n)}. \tag{5.2}$$

Por exemplo, calcularemos (**5.1**) e (**5.2**) para funções em $W^{r,p}(R^n)$ e $L^p(R^n)$. Vejamos.

Seja $g \in W^{r,p}(R^n)$. Tomando o ínfimo sobre $\pi \in P_{r-1}$ no **Lema 4.2** com constante c_0 e lembrando da definição dada em (**4.3**), tem-se

$$E_r(g,\rho,x)_p = \inf_{\pi \in P_{r-1}} \left(\int_{Q_\rho(x)} |g-\pi|^p \right)^{1/p} \leq c_0 |Q_\rho(x)|^{r/n} |g|_{W^{r,p}(Q_\rho(x))} = c_0 \rho^r \sum_{|\nu|=r} \|D^\nu g\|_{L^p(Q_\rho(x))}.$$

Os dois membos da desigualdade acima depende de x. Pelo *Teorema de Fubini*[56] seguem

$$\begin{aligned} E_r(g,\rho)_p &\leq c_0\rho^r \sum_{|\nu|=r} \| \|D^\nu g\|_{L^p(Q_\rho(x))} \|_{L^p(R^n)} \\ &= c_0\rho^r \sum_{|\nu|=r} \left(\int_{R^n} \int_{R^n} |D^\nu g(y)|^p \chi_{Q_\rho(x)}(y)\, dy\, dx \right)^{1/p} \\ &= c_0\rho^r \sum_{|\nu|=r} \left(\int_{R^n} \int_{R^n} |D^\nu g(y)|^p \chi_{Q_\rho(x)}(y)\, dx\, dy \right)^{1/p} \\ &= c_0\rho^r \sum_{|\nu|=r} \left(\int_{R^n} \chi_{Q_\rho(x)}(y) \int_{R^n} |D^\nu g(y)|^p\, dx\, dy \right)^{1/p} \\ &= c_0\rho^{r+n/p} \sum_{|\nu|=r} \left(\int_{R^n} |D^\nu g(y)|^p dy \right)^{1/p} \\ &= c_0\rho^{r+n/p} |g|_{W^{r,p}(R^n)} \\ &\leq c_0\rho^{r+n/p} \|g\|_{W^{r,p}(R^n)}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Por outro lado, se $f \in L^p(R^n)$ temos, pela definição (**5.1**),

$$E_r(f,\rho,x)_p = \inf_{\pi \in P_{r-1}} \left(\int_{Q_\rho(x)} |f-\pi|^p \right)^{1/p} \leq \left(\int_{Q_\rho(x)} |f|^p \right)^{1/p}$$

pois o polinômio nulo é um elemento de P_{r-1}.

Similarmente ao que foi feito para obter (**5.3**) temos

$$E_r(f,\rho)_p \leq \left(\int_{R^n} \int_{R^n} |f|^p \chi_{Q_\rho(x)}\, dy\, dx \right)^{1/p} \leq \rho^{n/p} \|f\|_{L^p(R^n)}. \tag{5.4}$$

Considerando a subaditividade do operador $E_r(.,\rho)_p$, seguem, por (**5.3**) e (**5.4**),

$$E_r(f,\rho)_p \leq E_r(f-g,\rho)_p + E_r(g,\rho)_p \leq \max\{1,c_0\}\rho^{n/p}\{\|f-g\|_{L^p(R^n)} + \rho^r \|g\|_{W^{r,p}(R^n)}\}. \tag{5.5}$$

O resultado principal de Johnen-Scherer [1] é a equivalência em

$$c_1\omega_r(f,\rho)_p \leq \inf_{g \in W^{r,p}(\Omega)} \{\|f-g\|_{L^p(\Omega)} + \rho^r \|g\|_{W^{r,p}(\Omega)}\} \leq c_2\omega_r(f,\rho)_p \quad \text{para todo } \rho > 0$$

onde as constantes c_1 e c_2 dependem somente de Ω, r e p.

[56] Três versões do *Teorema de Fubini* podem ser vistos em Fisher-Shilleto [1].

Tomando o ínfimo sobre todo $g \in W^{r,p}(R^n)$ em (**5.5**) e utilizando o resultado acima, seguem

$$E_r(f,\rho)_p \leq \max\{1,c_0\}\rho^{n/p} \inf_{g\in W^{r,p}(R^n)}\{\|f-g\|_{L^p}+\rho^r\|g\|_{W^{r,p}(R^n)}\} \leq c_2 \max\{1,c_0\}\rho^{n/p}\omega_r(f,\rho)_p\,. \quad (5.6)$$

(**5.6**) vale quando $p=\infty$ com C (espaço das funções contínuas) no lugar de L^∞; segundo DeVore-Sharpley [1].

Agora apresentaremos dois resultados que serão utilizados na próxima demonstração.

i) Seja φ uma função ≥ 0 definida sobre o conjunto dos cubos

$$A := \{Q_\rho(x)\,:\, Q_\rho(x)\subset R^n\,,\ \rho>0\,,\ x\in R^n\}\,.$$

Então, para todo $t\geq 0$,

$$\left[\sup_{Q_\rho(x)\in A}\varphi\left(Q_\rho(x)\right)\right]^t = \sup_{Q_\rho(x)\in A}\left[\varphi\left(Q_\rho(x)\right)\right]^t\,. \quad (5.7)$$

ii) Seja Ψ uma função ≥ 0 definida sobre o conjunto dos polinômios

$$B := \{\,\pi\,:\,\pi\in P_k\,,\ k\in N\,\}\,.$$

Então, para todo $t\geq 0$,

$$\left[\inf_{\pi\in B}\Psi(\pi)\right]^t = \inf_{\pi\in B}\left[\Psi(\pi)\right]^t\,. \quad (5.8)$$

As verificações dos items i) e ii) são as aplicações das definições de *supremo* e *ínfimo*.

Demonstração do Teorema 5.1 . Verificaremos a segunda imersão.

Seja $f\in C_p^\alpha(R^n)$, isto é, tem-se f e $f_\alpha^\sharp\in L^p(R^n)$.

Para $r:=[\alpha]+1>[\alpha]$ o **Teorema 2.8** com constante c_0 fornece,

$$\|\Delta_h^r f\|_{L^p(\Omega_{r,h})}\leq c_0|h|^\alpha\|f_\alpha^\sharp\|_{L^p(\Omega_{r,h})} \quad \text{para todo } h\in R^n\,.$$

Portanto, com a notação (**4.21**), segue

$$\omega_r(f,t)_p = \sup_{|h|<t}\|\Delta_h^r f\|_{L^p(\Omega_{r,h})}\leq c_0 t^\alpha\|f_\alpha^\sharp\|_{L^p(\Omega_{r,h})} \quad \text{para todo } t>0\,.$$

Por (**4.22**) com $q=\infty$, temos

$$|f|_{B_p^{\alpha,\infty}(R^n)} = \sup_{t>0} t^{-\alpha}\omega_r(f,t)_p \leq c_0\|f_\alpha^\sharp\|_{L^p(R^n)} = c_0|f_\alpha^\sharp|_{C_p^\alpha(R^n)}\,.$$

Somando $\|f\|_{L^p(R^n)}<\infty$ em ambos os lados da desigualdade acima e novamente, por (**4.22**), segue

$$\|f\|_{B_p^{\alpha,\infty}(R^n)} = \|f\|_{L^p(R^n)} + |f|_{B_p^{\alpha,\infty}(R^n)} \leq \|f\|_{L^p(R^n)} + c_0|f_\alpha^\sharp|_{C_p^\alpha(R^n)} \leq \max\{1,c_0\}\|f\|_{C_p^\alpha(R^n)}\,.$$

Agora verificaremos a primeira imersão. Para isso, consideremos a função $F_{\alpha,q}^\sharp$ definida no **Capítulo 3**. Para simplificar a notação durante somente esta demonstração utilizaremos $F:=F_{\alpha,p}^\sharp$.

Utilizaremos a seguinte *função maximal* auxiliar

$$G(x) := \sup_{R^n\supset Q_\rho(x)}\ \inf_{\pi\in P_{r-1=[\alpha]}}\frac{1}{|Q_\rho(x)|^{\alpha/n}}\left(\frac{1}{|Q_\rho(x)|}\int_{Q_\rho(x)}|f-\pi|^p\right)^{1/p} = \sup_{\rho>0}\frac{1}{\rho^{\alpha+\frac{n}{p}}}E_r(f,\rho,x)_p\,.$$

Analogamente à equivalência entre as funções maximais $Mf_2(x)$ e $Mf(x)$ dadas no **Capítulo 1**, verificaremos a equivalência entre $F(x)$ e $G(x)$.

Primeiramente, pela inclusão

$$\{Q_\rho(x) : Q_\rho(x) \subset R^n, \ \rho > 0, \ x \in R^n\} \subseteq \{Q : x \in Q \subset R^n\}$$

segue que $\sup\limits_{R^n \supset Q_\rho(x)} \ldots \leq \sup\limits_{R^n \supset Q \ni x} \ldots$. Donde $G(x) \leq F(x)$.

Estamos interessados na desigualdade reversa desta última relação. Para isso utilizaremos (**5.7**) e (**5.8**) para obter

$$F(x) \leq 3^{\alpha + \frac{n}{p}} G(x). \tag{5.9}$$

De fato, fixado um ponto $x \in R^n$ consideremos um cubo Q contendo x. Se ρ é o comprimento do lado de Q então podemos definir os cubos $Q_\rho(x)$ e $Q_{3\rho}(x)$. Assim, $Q \subset Q_{3\rho}(x)$, $|Q_{3\rho}(x)| = 3^n \rho^n = 3^n |Q_\rho(x)| = 3^n |Q|$ e

$$\begin{aligned}
\inf_{\pi \in P_{r-1=[\alpha]}} \frac{1}{|Q|^{\alpha/n}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f - \pi|^p \right)^{1/p} &\leq \inf_{\pi \in P_{r-1=[\alpha]}} \left(\frac{3^n}{|Q_{3\rho}(x)|} \right)^{\alpha/n} \left(\frac{3^n}{|Q_{3\rho}(x)|} \int_{Q_{3\rho}(x)} |f - \pi|^p \right)^{1/p} \\
&\leq \frac{3^{\alpha + \frac{n}{p}}}{(3\rho)^{\alpha + \frac{n}{p}}} E_r(f, 3\rho, x)_p \leq 3^{\alpha + \frac{n}{p}} G(x).
\end{aligned}$$

Tomando o supremo sobre todos os cubos Q contendo x segue (**5.9**).

Utilizando o fato de $\dfrac{E_r(f,\rho,x)_p^p}{\rho^{\alpha p + n + 1}}$ ser ser uma função ≥ 0 para todo $\rho > 0$ e pelo *Teorema do Valor Médio* no intervalo $[\rho_0, 2\rho_0]$ para $\rho_0 > 0$ qualquer, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{E_r(f,\rho,x)_p^p}{\rho^{\alpha p + n + 1}} d\rho &\geq \int_{\rho_0}^{2\rho_0} \frac{E_r(f,\rho,x)_p^p}{\rho^{\alpha p + n + 1}} d\rho = \frac{E_r(f,\rho_1,x)_p^p}{\rho_1^{\alpha p + n + 1}} \rho_0 \\
&\geq \frac{E_r(f,\rho_1,x)_p^p}{(2\rho_0)^{\alpha p + n + 1}} \rho_0 = \frac{1}{2^{\alpha p + n + 1}} \frac{E_r(f,\rho_0,x)_p^p}{\rho_0^{\alpha p + n}}
\end{aligned}$$

onde $\rho_0 < \rho_1 < 2\rho_0$ e ρ_0 é qualquer > 0.

Por (**5.9**) e (**5.7**) e tomando o supremo sobre todo $\rho_0 > 0$ na desigualdade acima obteremos o seguinte:

$$F(x)^p \leq 3^{\alpha p + n} G(x)^p = 3^{\alpha p + n} \sup_{\rho > 0} \frac{1}{\rho^{\alpha p + n}} E_r(f,\rho,x)_p^p \leq 2^{\alpha p + n + 1} 3^{\alpha p + n} \int_0^\infty \frac{E_r(f,\rho,x)_p^p}{\rho^{\alpha p + n}} \frac{d\rho}{\rho}.$$

Integrando sobre R^n a relação acima e utilizando (**4.2**), (**5.2**) e (**5.6**) com constante $c_3 := c_2 \max\{1, c_0\}$, vem

$$\begin{aligned}
\int_{R^n} F(x)^p &\leq 2.6^{\alpha p + n} \int_{R^n} \int_0^\infty \frac{E_r(f,\rho,x)_p^p}{\rho^{\alpha p + n}} \frac{d\rho}{\rho} dx = 2.6^{\alpha p + n} \int_0^\infty \frac{1}{\rho^{\alpha p + n}} \int_{R^n} E_r(f,\rho,x)_p^p dx \frac{d\rho}{\rho} \\
&= 2.6^{\alpha p + n} \int_0^\infty \frac{1}{\rho^{\alpha p + n}} E_r(f,\rho)_p^p \frac{d\rho}{\rho} \leq 2.6^{\alpha p + n} c_3^p \int_0^\infty \left[\frac{\omega_r(f,\rho)_p}{\rho^\alpha} \right]^p \frac{d\rho}{\rho} \\
&= 2.6^{\alpha p + n} c_3^p |f|_{B_p^{\alpha,p}(R^n)}.
\end{aligned}$$

Extraindo a raiz p-ésima da relação acima e utilizando a **Proposição 3.2** com constante c_4 e também (**3.9**) , seguem

$$\begin{aligned} \|f_\alpha^\sharp\|_{L^p(R^n)} &= \|f_{\alpha,1}^\sharp\|_{L^p(R^n)} \le c_4\|M(F_{\alpha,p}^\sharp)\|_{L^p(R^n)} \\ &\le c_4\|F_{\alpha,p}^\sharp\|_{L^p(R^n)} = c_4\|F\|_{L^p(R^n)} \le (2.6^{\alpha p+1})^{1/p}c_3c_4|f|_{B_p^{\alpha,p}(R^n)} . \end{aligned}$$

Logo, somando $\|f\|_{L^p(R^n)} < \infty$, obtemos

$$\begin{aligned} \|f\|_{C_p^\alpha(R^n)} &= \|f\|_{L^p(R^n)} + \|f_\alpha^\sharp\|_{L^p(R^n)} \le \|f\|_{L^p(R^n)} + (2.6^{\alpha p+1})^{1/p}c_3c_4|f|_{B_p^{\alpha,p}(R^n)} \\ &\le \max\{1, (2.6^{\alpha p+1})^{1/p}c_3c_4\}\|f\|_{B_p^{\alpha,p}(R^n)} . \end{aligned}$$

Isto finaliza o teorema. ■

5.1.1 Otimalidade da Imersão $B_p^{\alpha,p}(R^n) \hookrightarrow C_p^\alpha(R^n)$

O resultado principal desta subseção é $B_p^{\alpha,q}(R^n) \not\hookrightarrow C_p^\alpha(R^n)$ para todo q satisfazendo $1 \le p < q \le \infty$.

No caso $p = q$ vale a inclusão $B_p^{\alpha,p}(R^n) \subseteq C_p^\alpha(R^n)$ para $1 \le p \le \infty$; este resultado é o **Teorema 5.1**.

Mas antes salientamos a inclusão $B_p^{\alpha,q}(R^n) \subseteq B_p^{\alpha,\infty}(R^n)$ onde $1 \le p \le q \le \infty$ que está provado em Bergh-Löfströn [1] e Bennett-Sharpley [2].

Lema 5.2 . *Se $1 \le p < \infty$ e $\alpha > 0$, então existe uma função f pertencente a $B_p^{\alpha,q}(R^n)$ para cada q satisfazendo $p < q \le \infty$, mas $f \notin C_p^\alpha(R^n)$.*

Demonstração . Provaremos este lema somente no caso unidimensional $n = 1$ e $0 < \alpha < 1$. (Este caso é utilizado para provar quando $n > 1$ e $\alpha > 0$ e está indicado em DeVore-Sharpley [1].)

Observamos que o espaço $C_p^\alpha(R)$ independe do parâmetro q.

Logo, pela inclusão $B_p^{\alpha,q}(R) \subseteq B_p^{\alpha,\infty}(R)$, podemos procurar f em $B_p^{\alpha,q}(R)$ onde q é finito.

Da relação $1 + \frac{1}{p} - \alpha > 1 - \alpha > 0$ podemos definir $\delta := \frac{1}{1+\frac{1}{p}-\alpha} > 0$. Assim, $2^\delta > 1$ e fazemos $a := \frac{1}{2^\delta} < 1$. Consideremos a função *chapéu*

$$\Psi(x) := \begin{cases} x & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ 2 - x & \text{se } 1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{em outros casos} . \end{cases} \tag{5.10}$$

Escolhemos infinitos intervalos disjuntos $I_j := [a_j, b_j]$ tal que $\frac{1}{2}(b_j - a_j) = h_j := a^j$. Desde que a série geométrica $\sum_{j=1}^\infty h_j = \sum_{j=1}^\infty a^j < \infty$ converge, pois $a < 1$, podemos escolher um intervalo finito $[0, A]$ contendo todos os I_j com $A < \infty$.

Definimos

$$f_j(x) := \frac{1}{j^{1/p}} 2^j h_j \Psi\left(\frac{x - a_j}{h_j}\right) .$$

Afirmamos que o suporte de f_j é I_j,

De fato, consideremos a mudança de coordenada de I_j em $[0, 2]$ dada por $y := \frac{x-a_j}{h_j} = \frac{2(x-a_j)}{b_j-a_j}$. Se $x \in I_j$ então $0 \le y \le 2$ e $f_j(y) = j^{-1/p}2^j h_j \Psi(y) \ge 0$; caso contrário, se $x \notin I_j$ então $y > 2$ ou $y < 0$ e $f_j(y) = 0$. Isto mostra a afirmação.

Portanto,

$$\|f_j\|_{L^p(R)}^p = j^{-1}2^{jp}h_j^p \int_{a_j}^{b_j} \Psi\left(\frac{x - a_j}{h_j}\right)^p dx = j^{-1}2^{jp}h_j^{p+1}\int_0^2 \Psi(y)^p dy = j^{-1}2^{jp}h_j^{p+1}\frac{2}{p+1} . \tag{5.11}$$

A função procurada é

$$f := \sum_{j=1}^{\infty} f_j \,. \tag{5.12}$$

Veremos que $f \in L^p(R)$. Os fatores $\frac{1}{j}$ e $\frac{2}{p+1}$ são ≤ 1; $a^{\alpha p}$ é < 1 e $2 = a^{-\frac{1}{\delta}}$ e serão utilizados em (**5.12**) para obter a seguinte cota superior para $\|f\|^p_{L^p(R)}$ em termos de uma série geométrica convergente:

$$\|f\|^p_{L^p(R)} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|f_j\|^p_{L^p(R)} \leq \sum_{j=1}^{\infty} 2^{jp} h_j^{p+1} = \sum_{j=1}^{\infty} a^{j(p+1-p/\delta)} = \sum_{j=1}^{\infty} (a^{\alpha p})^j < \infty \,.$$

Isto mostra $f \in L^p(R)$.

Veremos que $f \notin C^\alpha_p$. Para isso serão necessárias mais algumas estimativas. Usamos (**5.10**), a notação em (**2.11**) e a mudança de coordenadas acima, para obter

$$f_{I_j} = \frac{1}{|I_j|} \int_{I_j} f_j = \frac{1}{2h_j} j^{-1/p} 2^j h_j^2 \int_0^2 \Psi(y)dy = \frac{1}{2} j^{-1/p} 2^j h_j \,.$$

Assim,

$$\int_{I_j} |f - f_{I_j}| = \int_{I_j} |f_j - f_{I_j}| = j^{-1/p} 2^j h_j \int_{a_j}^{b_j} \left| \Psi\left(\frac{x - a_j}{h_j}\right) - \frac{1}{2} \right| dx \,.$$

Fazendo $y := \frac{x - a_j}{h_j}$, esta última integral é igual a h_j vezes

$$\int_0^2 \left| \Psi(y) - \frac{1}{2} \right| dy = \int_0^1 \left| y - \frac{1}{2} \right| dy + \int_1^2 \left| (2 - y) - \frac{1}{2} \right| dy = \cdots = \frac{1}{2} \,.$$

Para $x \in I_j$, segue da definição (**2.20**) de $f^\sharp_\alpha$ e das estimativas acima,

$$f^\sharp_\alpha(x) = \sup_{R \supset I \ni x} \frac{1}{|I|^{1+\alpha}} \int_I |f - f_I| \geq \frac{1}{|I_j|^{1+\alpha}} \int_{I_j} |f - f_{I_j}| = \frac{j^{-1/p} 2^j h_j h_j \frac{1}{2}}{(2h_j)^{1+\alpha}} = \frac{j^{-1/p} 2^j h_j^{1-\alpha}}{2^{2+\alpha}} \,.$$

Elevando à potência p e integrando a desigualdade acima sobre R e usando as relações

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 2^{-\delta} \implies 2 = a^{-\frac{1}{\delta}} \\[2ex] h_j = a^j = 2^{-\delta j} \\[2ex] |I_j| = 2h_j = 2^{1-\delta j} \\[2ex] \dfrac{1}{\delta} = 1 + \dfrac{1}{p} - \alpha \implies \dfrac{1}{\delta} - \dfrac{1}{p} = 1 - \alpha \implies \dfrac{p}{\delta} - 1 = p(1 - \alpha) \quad \text{e} \quad 1 - \dfrac{\delta}{p} = \delta(1 - \alpha) \\[2ex] a^{m+1} \leq s \implies a^m \leq \dfrac{s}{a} \implies a^{m\alpha} \leq \dfrac{s^\alpha}{a^\alpha} \\[2ex] a = 2^{-\delta} \implies a^{p(\alpha-1)} = 2^{-p(\alpha-1)\delta} = 2^{\frac{p(\alpha-1)}{\alpha - 1 - \frac{1}{p}}} = 2^{p \frac{p(\alpha-1)}{p(\alpha-1)-1}} \geq 2^p \end{array} \right. \tag{5.13}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\int_R \left[f_\alpha^\sharp(x)\right]^p dx &= \int_{\bigcup I_j} \left[f_\alpha^\sharp(x)\right]^p dx = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{I_j} \left[f_\alpha^\sharp(x)\right]^p dx \\
&\geq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{j^{-1/p} 2^j h_j^{1-\alpha}}{2^{2+\alpha}}\right)^p . |I_j| = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} 2^{[j-\delta j(1-\alpha)-(2+\alpha)]p} . 2^{1-\delta j} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} 2^{jp-\delta j(1-\alpha)p-(2+\alpha)p} . 2^{1-\delta j} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} 2^{jp-\delta j(\frac{p}{\delta}-1)-(2+\alpha)p} . 2^{1-\delta j} \\
&= 2^{1-(2-\alpha)p} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} = \infty .
\end{aligned}$$

Isto mostra que $f_\alpha^\sharp \notin L^p(R)$. Donde $f \notin C_p^\alpha(R)$.

Mostraremos a seguir: $f \in B_p^{\alpha,q}(R)$.

Para obter a norma de Besov (conforme (**4.22**)) precisamos estimar $\|\Delta_s f\|_{L^p(R)}$ com $0 < s < a$.

Escolhemos m tal que $h_{m+1} \leq s < h_m$, isto é, $a^{m+1} \leq s < a^m$; como $0 < a < 1$ seguem $(m+1)\ln a \leq \ln s < m \ln a < 0$. Logo, $(m+1)|\ln a| \geq |\ln s > m|\ln a|$, isto é, $m+1 \geq \frac{|\ln s|}{|\ln a|} > m$.

Como $0 < \cdots < h_{m+1} < s < h_m < h_{m-1} < \cdots < h_2 < h_1$ temos $0 < \frac{s}{h_j} < 1$ e $0 < 1 - \frac{s}{h_j} < 1$ para todo $j = 1, 2, \cdots, m$. Logo, usando a mudança de coordenadas acima,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} \|\Delta_s f_j\|_{L^p(R)} &= \sum_{j=1}^{m} \left[\int_R |f_j(x+s) - f_j(x)|^p \, dx\right]^{1/p} \\
&= \sum_{j=1}^{m} j^{-1/p} 2^j h_j \left[\int_0^2 \left|\Psi\left(y + \frac{s}{h_j}\right) - \Psi(y)\right|^p h_j \, dy\right]^{1/p} \\
&= \sum_{j=1}^{m} j^{-1/p} 2^j h_j^{1+\frac{1}{p}} \left[\frac{3}{p+1}\left(\frac{s}{h_j}\right)^{p+1} + 2\left(\frac{s}{h_j}\right)^p \left(1 - \frac{s}{h_j}\right)\right]^{1/p} \\
&\leq \sum_{j=1}^{m} j^{-1/p} 2^j h_j^{1+\frac{1}{p}} \left[\frac{3}{p+1}\left(\frac{s}{h_j}\right)^{p} + 2\left(\frac{s}{h_j}\right)^p \left(1 - \frac{s}{h_j}\right)\right]^{1/p} \\
&= \sum_{j=1}^{m} j^{-1/p} 2^j h_j^{1+\frac{1}{p}} \left(\frac{s}{h_j}\right) \left[\frac{3}{p+1} + 2\left(1 - \frac{s}{h_j}\right)\right]^{1/p} \\
&\leq \sum_{j=1}^{m} j^{-1/p} 2^j h_j^{1/p} s \left[\frac{3}{p+1} + 2\right]^{1/p} \\
&= \left[\frac{2p+5}{p+1}\right]^{1/p} \sum_{j=1}^{m} j^{-1/p} 2^j h_j^{1/p}
\end{aligned}$$

Mais adiante necessitaremos da seguinte propriedade: a função real $g : [1, +\infty) \to R$ dada por $g(t) = t^{-1/p} a^{t(\alpha-1)}$ é crescente pois a derivada $g'(t)$ é ≥ 0 para $t \geq \frac{1}{p \ln 2}$. (Observamos que $\frac{1}{p \ln 2}$, como função de p, é estritamente decrescente e assume o máximo quando $p = 1$ e neste caso $\frac{1}{p \ln 2}$ vale aproximadamente $1,44$.)

De fato, se $t \geq \frac{1}{p \ln 2}$ temos $2^p \geq e^{1/t}$. Donde, por (**5.13**), segue $a^{p(\alpha-1)} \geq 2^p \geq e^{1/t}$. Logo, $p(\alpha-1)\ln a \geq \frac{1}{t}$. Assim,

$$g'(t) = t^{-1/p} a^{t(\alpha-1)} \left(-\frac{1}{pt} + (\alpha-1)\ln a \right) \geq 0 .$$

Isto mostra a propriedade acima.

Como estamos supondo $0 < \alpha < 1$ seguem as desigualdades $a^\alpha < 1$ e $a^{(\alpha-1)} > 1$; as quais utilizaremos a seguir em uma progressão geométrica de razão a^α. Pela linearidade do operador Δ_s (conforme **subseção 2.4.1**) aplicado a (**5.12**) temos $\Delta_s f = \sum_{j=1}^{\infty} \Delta_s f_j$.

Os comentários nos parágrafos acima, (**5.10**), (**5.12**) e $h_{m+1} = a^{m+1} < s$ permitem obter

$$\begin{aligned}
\|\Delta_s f\|_{L^p(R)} &\leq \sum_{j=1}^{m} \|\Delta_s f_j\|_{L^p(R)} + \sum_{j=m+1}^{\infty} \|f_j(. - s) - f_j(.)\|_{L^p(R)} \\
&\leq \sum_{j=1}^{m} \|\Delta_s f_j\|_{L^p(R)} + 2 \sum_{j=m+1}^{\infty} \|f_j\|_{L^p(R)} \\
&\leq \left(\frac{2p+5}{p+1}\right)^{1/p} s \sum_{j=1}^{m} j^{-1/p} 2^j h_j^{1/p} + 2 \sum_{j=m+1}^{\infty} j^{-1/p} 2^j h_j^{1+1/p} \left(\frac{2}{p+1}\right)^{1/p} \\
&= \left(\frac{2p+5}{p+1}\right)^{1/p} s \sum_{j=1}^{m} j^{-1/p} (2a^{1/p})^j + 2 \left(\frac{2}{p+1}\right)^{1/p} \sum_{j=m+1}^{\infty} j^{-1/p} (2a^{1+1/p})^j \\
&\leq \left(\frac{2p+5}{p+1}\right)^{1/p} s \sum_{j=1}^{m+1} j^{-1/p} a^{j(\alpha-1)} + 2 \left(\frac{2}{p+1}\right)^{1/p} \sum_{j=m+1}^{\infty} a^{j[-\frac{1}{\delta}+1+\frac{1}{p}]} \\
&\leq \left(\frac{2p+5}{p+1}\right)^{1/p} s a^{(m+1)(\alpha-1)} (m+1)^{-1/p} + 2 \left(\tfrac{2}{p+1}\right)^{1/p} \sum_{j=m+1}^{\infty} j^{-1/p} a^{\alpha j} \\
&\leq \left(\frac{2p+5}{p+1}\right)^{1/p} a^m a^{m\alpha} a^{-m} a^\alpha a^{-1} (m+1)^{-1/p} + +2 \left(\frac{2}{p+1}\right)^{1/p} (m+1)^{-1/p} \frac{a^{\alpha(m+1)}}{1-a^\alpha} \\
&\leq \frac{\left(\frac{2p+5}{p+1}\right)^{1/p}}{a} \frac{s^\alpha}{a^\alpha} a^\alpha (m+1)^{-1/p} + \frac{2}{1-a^\alpha} \left(\frac{2}{p+1}\right)^{1/p} a^{(m+1)\alpha} (m+1)^{-1/p} \\
&\leq \frac{\left(\frac{2p+5}{p+1}\right)^{1/p}}{a} s^\alpha (m+1)^{-1/p} + \frac{2}{1-a^\alpha} \left(\frac{2}{p+1}\right)^{1/p} s^\alpha (m+1)^{-1/p} \\
&\leq \frac{\left(\frac{2p+5}{p+1}\right)^{1/p}}{a|\ln a|^{-1/p}} s^\alpha |\ln s|^{-1/p} + \frac{2}{1-a^\alpha} \left(\frac{2}{p+1}\right)^{1/p} s^\alpha \frac{1}{|\ln a|^{-1/p}} |\ln s|^{-1/p} \\
&\leq c s^\alpha |\ln s|^{-1/p}
\end{aligned}$$

para todo $0 < s < a$ e onde a constante $c := \max\left\{ \dfrac{\left(\frac{2p+5}{p+1}\right)^{1/p}}{a|\ln a|^{-1/p}}, \dfrac{2}{1-a^\alpha}\left(\dfrac{2|\ln a|}{p+1}\right)^{1/p} \right\}$ depende somente de α e p pois a depende de α e p.

Pela relação acima e a notação dada em (**4.21**) temos,

$$\omega(f,t)_p = \sup_{|h|\leq t} \|\Delta_h f\|_{L^p(R)} \leq ct^\alpha |\log t|^{-1/p} = ct^\alpha(-\log t)^{-1/p} \quad \text{para todo } 0 < t < a.$$

Sendo $0 < a < 1$, $-\frac{q}{p}+1 < 0$ e $\frac{q}{p} \neq 1$ seguem

$$\int_0^a \left(\frac{\omega(f,t)_p}{t^\alpha}\right)^q \frac{dt}{t} \leq c^q \int_0^a (-\log t)^{-q/p} \frac{dt}{t} = c^q \left[\frac{(-\log t)^{-\frac{q}{p}+1}}{-\frac{q}{p}+1} \Bigg|_{t=0}^{t=a} \right] < \infty.$$

Por outro lado, também $\|\Delta_s f\|_{L^p(R)} \leq \|f(.+s)\|_{L^p(R)} + \|f\|_{L^p(R)} = 2\|f\|_{L^p(R)}$.
Portanto, $\omega(f,t)_p = \sup_{|h|\leq t} \|\Delta_h f\|_{L^p(R)} \leq 2\|f\|_{L^p(R)}$. Assim,

$$\int_a^\infty \left(\frac{\omega(f,t)_p}{t^\alpha}\right)^q \frac{dt}{t} \leq 2\|f\|_{L^p(R)} \int_a^\infty t^{-\alpha q-1} dt = 2\|f\|_{L^p(R)} \frac{a^{-\alpha q}}{\alpha q} < \infty.$$

Isto mostra que

$$|f|^q_{B_p^{\alpha,q}(R)} = \int_0^\infty \left(\frac{\omega(f,t)_p}{t^\alpha}\right)^q \frac{dt}{t} = \int_0^a \left(\frac{\omega(f,t)_p}{t^\alpha}\right)^q \frac{dt}{t} + \int_a^\infty \left(\frac{\omega(f,t)_p}{t^\alpha}\right)^q \frac{dt}{t} \quad \text{é finito.}$$

Logo, $\|f\|_{B_p^{\alpha,q}(R)} = \|f\|_{L^p(R)} + |f|_{B_p^{\alpha,q}(R)} < \infty$ e $f \in B_p^{\alpha,q}(R)$ quando $p < q < \infty$. ■

Capítulo 6

A Imersão $C_p^\alpha(R^n) \hookrightarrow C_q^\beta(R^n)$

Neste capítulo apresentamos a imersão $C_p^\alpha(R^n) \hookrightarrow C_q^\beta(R^n)$ quando $1 \le p \le q \le \infty$ e $0 \le \beta \le \alpha + n\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)$. Um caso particular dessa imersão já foi obtido no **Teorema 4.8**.

Com a finalidade de obter essa imersão, apresentamos alguns resultados intermediários, que por si só, valorizam os métodos da Análise Harmônica. Esses resultados são:

i) **Teorema 6.1** para $1 \le p < \infty$, (este teorema é uma generalização do caso $p = 1$ obtido por DeVore-Sharpley [1])

ii) **Teorema 6.2** de Elias M. Stein e

iii) **Teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev**.

Utilizaremos o *Operador Potencial de Riesz* para obter resultados em $L^1(R^n) + L^\infty(R^n)$.[57]

6.1 Uma Imersão no Espaço das Funções Contínuas

Nesta seção, consideramos o espaço das funções contínuas $C(\Omega)$ e fixamos uma função $f \in L^{q_0}_{loc}(\Omega)$ onde $\Omega = R^n$ ou um cubo de R^n, apresentaremos uma função contínua g e uma imersão do espaço

$$\{f \in L^{q_0}_{loc}(\Omega) \,:\, f^\sharp_\alpha \in L(n/\alpha, 1)(\Omega)\} \hookrightarrow C(\Omega)$$

no espaço das funções contínuas $C(\Omega)$ com norma em $C(\Omega)$ definida por $\|f\|_{C(\Omega)} := \sup_{x\in\Omega} |f(x)|$.

Mais precisamente, provaremos o

Teorema 6.1 . *Sejam Ω um domínio de R^n e $f^\sharp_\alpha$ uma função localmente em $L(n/\alpha, 1)(\Omega)$. Então, existe uma função contínua g em $C(\Omega)$ tal que $g(x) = f(x)$ para quase todo x de Ω.*

Além disso, se $f^\sharp_\alpha \in L(n/\alpha, 1)(\Omega)$ e Ω é todo o R^n ou um cubo de R^n, então existem um polinômio π de grau $\le [\alpha]$ e uma constante c dependendo de n e α satisfazendo

$$\|g - \pi\|_{C(\Omega)} \le c\|f^\sharp_\alpha\|_{L(n/\alpha,1)(\Omega)}\,.$$

[57]Os espaços $L^1(R^n) + L^\infty(R^n)$ e $L^1(R^n) \bigcap L^\infty(R^n)$ foram estudados por G. G. Gould em 1959 e por W. A. Luxemburgo e A. C. Zaanen em 1966; conforme Bennett-Sharpley [2].

Demonstração . Sejam dois cubos R e R^* contidos em R^n com $R^* \subset R$ e lado de $R \leq 2$ lado de R^*, isto é, $|R| \leq 2^n|R^*|$. Neste caso, pelo **Lema 2.7** item i) com $\nu = 0$ e constante c_1 e por (**3.19**) seguem

$$\|P_R f - P_{R^*} f\|_{L^\infty(R^*)} \leq c_1 |R^*|^{\alpha/n} \inf_{u \in R^*} f^\sharp_\alpha(u) \leq c_1 |R^*|^{\alpha/n} (f^\sharp_\alpha)^{**}(|R^*|) .$$

Por outro lado, sendo $(f^\sharp_\alpha)^{**}$ uma função não crescente (conforme **subseção 1.5.3**), isto é, $(f^\sharp_\alpha)^{**}(s) \geq (f^\sharp_\alpha)^{**}(t)$ para todo $0 < s \leq t$, segue

$$\int_{|R^*|/2}^{|R^*|} (f^\sharp_\alpha)^{**}(s) s^{\alpha/n} \frac{ds}{s} \geq (f^\sharp_\alpha)^{**}(|R^*|) \int_{|R^*|/2}^{|R^*|} s^{\frac{\alpha}{n}-1}\, ds = \frac{n(2^{\alpha/n}-1)}{\alpha 2^{\alpha/n}} |R^*|^{\alpha/n} (f^\sharp_\alpha)^{**}(|R^*|) .$$

Logo, juntando os dois últimos resultados, temos

$$\|P_R f - P_{R^*} f\|_{L^\infty(R^*)} \leq c_1 \frac{\alpha 2^{\alpha/n}}{n(2^{\alpha/n}-1)} \int_{|R^*|/2}^{|R^*|} (f^\sharp_\alpha)^{**}(s) s^{\alpha/n} \frac{ds}{s} . \tag{6.1}$$

Em geral, se R e R^* são dois cubos quaisquer de R^n onde $R^* \subset R$, escolhemos uma seqüência finita de cubos encaixantes tais que $R =: R_0 \supset R_1 \supset \cdots \supset R_{m-1} \supset R_m := R^*$ cujo lado de $R_{j-1} = 2$ lado de R_j para $j = 1, 2, \cdots, m-1$ e o lado de $R_{m-1} \leq 2$ lado de R_m, isto é, $|R_{j-1}| = 2^n |R_j|$ para $j = 1, 2, \cdots, m-1$ e $|R_{m-1}| \leq 2^n |R_m|$.

Portanto, a decomposição $P_R f - P_{R^*} f = \sum_{j=1}^m P_{R_{j-1}} f - P_{R_j} f$, (**6.1**) e $|R_{j-1}|/2 = 2^{n-1}|R_j| \geq |R_j|$ para $j = 1, 2, \cdots, m-1$ produzem

$$\begin{aligned}
\|P_R f - P_{R^*} f\|_{L^\infty(R^*)} &\leq \sum_{j=1}^m \|P_{R_{j-1}} f - P_{R_j}\|_{L^\infty(R_j)} \leq \int_{|R_0|/2}^{|R_0|} (f^\sharp_\alpha)^{**}(s) s^{\alpha/n} \frac{ds}{s} \\
&\quad + c_1 \frac{\alpha 2^{\alpha/n}}{n(2^{\alpha/n}-1)} \sum_{j=1}^m \int_{|R_j|/2}^{|R_j|} (f^\sharp_\alpha)^{**}(s) s^{\alpha/n} \frac{ds}{s} \qquad (6.2) \\
&\leq c \int_{|R^*|/2}^{|R|} (f^\sharp_\alpha)^{**}(s) s^{\alpha/n} \frac{ds}{s} (\leq c \|f^\sharp_\alpha\|_{L(n/\alpha,1)(\Omega)} < \infty)
\end{aligned}$$

onde $c := \max\left\{1, \frac{\alpha 2^{\alpha/n}}{n(2^{\alpha/n}-1)}\right\}$.

Seja f uma função localmente integrável em $L^1(\Omega)$. Por (**2.57**) vem

$$\lim_{Q \downarrow \{x\}} P_Q f(x) = f(x) \quad \text{para quase todo } x \in \Omega .$$

Além disso, para $f^\sharp_\alpha \in L(n/\alpha, 1)(\Omega)$ e (**6.2**), o limite $\lim_{Q \downarrow \{x\}} P_Q f(x)$ existe para quase todo x em Ω. Neste caso podemos definir

$$g(x) := \lim_{Q \downarrow \{x\}} P_Q f(x) \quad \text{para todo } x \in \Omega .$$

Vejamos duas propriedades de g. Afirmamos que

$$f(x) = g(x) \quad \text{para quase todo } x \in \Omega .$$

De fato, pelos dois resultados acima, segue

$$|f(x) - g(x)| \leq \left| f(x) - \lim_{Q \downarrow \{x\}} P_Q f(x) \right| + \left| g(x) - \lim_{Q \downarrow \{x\}} P_Q f(x) \right| = 0 \quad \text{para quase todo } x \in \Omega .$$

O próximo passo é mostrar a continuidade de g. Para isso, consideremos um cubo qualquer $R_0 \subset \Omega$ e $u \in R_0$. Seja Q outro cubo qualquer satisfazendo $Q \subset R_0$. Em (**6.2**) fazemos $R := Q$ e $R^* \downarrow \{u\}$ para obter

$$|P_Q f(u) - g(u)| \leq \lim_{R^*\downarrow\{u\}} |P_Q f(u) - P_{R^*} f(u)| \leq c \int_0^{|Q|} (F^{**}(s) s^{\alpha/n} \frac{ds}{s}. \tag{6.3}$$

onde $F := f^{\sharp}_{\alpha,R_0}$ e o índice R_0 significa que $f^{\sharp}_{\alpha}$ está definido sobre R_0 em vez de Ω.

Estimaremos a diferença $g(x) - g(y)$ para quaisquer x e y em Q. Por (**6.3**) segue

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &\leq |P_Q f(x) - g(x)| + |P_Q f(y) - g(y)| + |P_Q f(x) - P_Q f(y)| \\ &\leq 2c \int_0^{|Q|} F^{**}(s) s^{\alpha/n} \frac{ds}{s} + |P_Q f(x) - P_Q f(y)|. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Mas $F(x) := f^{\sharp}_{\alpha,R_0}(x) \leq f^{\sharp}_{\alpha}(x)$ quando $x \in R_0$; também, F possui suporte contido em R_0. Mas, devido a (**1.25**) segue, $F^{**}(s) \leq (f^{\sharp}_{\alpha})^{**}(s)$ para todo $s \geq 0$. Assim,

$$\|F\|_{L(n/\alpha,1)(R^n)} = \int_0^{\infty} F^{**}(s) s^{\alpha/n} \frac{ds}{s} \leq \int_0^{\infty} (f^{\sharp}_{\alpha})^{**}(s) s^{\alpha/n} \frac{ds}{s} = \|f^{\sharp}_{\alpha}\|_{L(n/\alpha,1)(R^n)} < \infty$$

e F está em $L(n/\alpha, 1)(R^n)$.

Primeiramente escolhemos Q suficientemente pequeno.

Fixado Q, fazendo $y \to x$ em (**6.4**) segue, $|g(x) - g(y)| \to 0$. Isto é, g é contínua em x. Sendo x um ponto qualquer de Ω conclui-se que g é contínua em todo Ω.

Quando Ω for igual a um cubo qualquer, digamos R_0, tem-se $F = f^{\sharp}_{\alpha}$. A desigualdade (**6.3**) fica

$$|P_{R_0} f(u) - g(u)| \leq c \int_0^{|R_0|} (F^{\sharp}_{\alpha})^{**}(s) s^{\alpha/n} \frac{ds}{s} \leq c \int_0^{|R_0|} (f^{\sharp}_{\alpha})^{**}(s) s^{\alpha/n} \frac{ds}{s} = c\|f^{\sharp}_{\alpha}\|_{L(n/\alpha,1)(R_0)}.$$

Substituímos o polinômio $\pi := P_{R_0} f$ de grau $\leq [\alpha]$ na relação acima e calculams o supremo sobre R_0 para obter

$$\|g - \pi\|_{C(R_0)} \leq c\|f^{\sharp}_{\alpha}\|_{L(n/\alpha,1)(R_0)}. \tag{6.5}$$

Se Ω não for um cubo R_0 mas todo o R^n também vale (**6.5**). Vejamos. Se $\Omega = R^n$ escolhemos uma seqüência infinita de cubos encaixantes $\{Q_j : j \in N\}$ com $Q_j \subset Q_{j+1}$ e lado de $Q_j = 2^j$, isto é, $|Q_j| = 2^{jn}$. Para cada dois índices quaisquer, digamos, j_0 e j_1 com $j_0 < j_1$, utilizamos (**6.2**) para obter

$$\|P_{Q_{j_1}} f - P_{Q_{j_0}} f\|_{C(Q_{j_0})} \leq c \int_{2^{j_0 n}}^{2^{j_1 n - 1}} (f^{\sharp}_{\alpha})^{**}(s) s^{\alpha/n} \frac{ds}{s} \to 0 \quad \text{quando } j_0 \text{ e } j_1 \to \infty.$$

Isto mostra que $\pi := \lim_{j\to\infty} P_{Q_j} f$ existe e é um polinômio de grau $\leq [\alpha]$ quando $f^{\sharp}_{\alpha} \in L(n/\alpha, 1)(R^n)$.

Fazendo $j_1 \to \infty$ temos

$$\|P_{Q_{j_0}} f - \pi\|_{C(Q_{j_0})} \leq c \int_{2^{j_0}}^{\infty} (f^{\sharp}_{\alpha})^{**}(s) s^{\alpha/n} \frac{ds}{s}.$$

Por outro lado, a desigualdade (**6.3**) com $|Q| = |Q_{j_0}| = 2^{j_0 n}$ produz

$$\|g - P_{Q_{j_0}} f\|_{C(Q_{j_0})} \leq c \int_0^{2^{j_1}} (f^{\sharp}_{\alpha})^{**}(s) s^{\alpha/n} \frac{ds}{s}.$$

Portanto, as duas desigualdades acima resultam em

$$\begin{aligned} \|g-\pi\|_{C(Q_{j_0})} &\leq \|g-P_{Q_{j_0}}f\|_{C(Q_{j_0})}+\|P_{Q_{j_0}}f-\pi\|_{C(Q_{j_0})} \\ &\leq 2c\int_0^\infty (f_\alpha^\sharp)^{**}(s)s^{\alpha/n}\frac{ds}{s} = 2c\|f_\alpha^\sharp\|_{L(n/\alpha,1)(R^n)}\,. \end{aligned}$$

A escolha de j_0 foi arbitrária e o termo $2c\|f_\alpha^\sharp\|_{L(n/\alpha,1)(R^n)}$ independe de j. Logo,

$$\|g-\pi\|_{C(R^n)} \leq 2c\|f_\alpha^\sharp\|_{L(n/\alpha,1)(R^n)}\,.$$

E isto finaliza a demonstração do **Teorema 6.1** ■

6.2 Um Resultado de Elias M. Stein

Como aplicação do **Teorema 6.1**, com $\alpha = 1$ e $p = 1$, no estudo de diferenciabilidade clássica de função apresentamos uma demonstração alternativa de um resultado devido a Elias M. Stein de 1981.

Teorema 6.2 . (Elias M. Stein) *Sejam Ω um domínio de R^n. Se ∇f existe no sentido fraco e está em $L(n,1)(\Omega)$, então a função f pode ser redefinida em um conjunto de medida zero tal que a função f seja contínua.*

Além disso, para a função f redefinida dessa maneira e para quase todo x em Ω, a função ∇f coincide com a derivada clássica de f, isto é,

$$|f(x+h)-f(x)-\nabla f(x).h| = o(|h|) \qquad \textit{quando } h\to 0\,.$$

Demonstração . Se $n=1$ então o teorema é, simplesmente, o *teorema de Legesgue para f'* pois $L(1,1)(\Omega)=L^1(\Omega)$. Vejamos o caso $n>1$.

Sejam o gradiente de f e sua norma dados por:

$$\nabla f(x) := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \frac{\partial}{\partial x_2}(x), \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}(x)\right) \quad \text{e} \quad |\nabla f(x)| := \left[\sum_{i-1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(x)\right)^2\right]^{1/2}.$$

i) Quando $n>1$ afirmamos que $|\nabla f|\in L(n,1)(\Omega)$ implica $f_1^\flat \in L(n,1)(\Omega)$.

De fato, para isso necessitaremos de três resultados:

a) O operador maximal M de Hardy-Littlewood é limitado em $L(n,1)(\Omega)$.

b) Em um espaço de dimensão finita, todas as normas são equivalentes. Em particular, a *norma euclideana* e a *norma da soma* são equivalentes em R^n. Assim, existem constantes c_0 e c_1 dependendo exclusivamente da dimensão n tal que

$$c_0\sum_{i-1}^{n}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\right| \leq |\nabla f| \leq c_1\sum_{i-1}^{n}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\right|.$$

c) O **Lema 4.3** item *i*) com constante c_2, e fato de $|g|\leq|h|$ implicar $M(|g|)\leq M(|h|)$, e o item *b*) acima, produzem

$$f_1^\flat(x) \leq c_2 M\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\right|\chi_\Omega\right)(x) \leq c_0c_2M(|\nabla f|\chi_\Omega) \qquad \text{para todo } x\in R^n\,.$$

O item $b)$ é um resultado clássico de Análise. Provaremos somente o item $a)$. Vejamos. Utilizando a **Proposição 1.20** item $i)$, a definição de $|.|^*_{L(n,1)(\Omega)}$ dada na **subseção 1.5.4** e o **Teorema 1.29** tem-se

$$\begin{aligned} \|Mf\|_{L(n,1)(\Omega)} &\leq \frac{n}{n-1}|Mf|^*_{L(n,1)(\Omega)} = \frac{n}{n-1}\int_0^\infty s^{1/n}(Mf)^*(s)\frac{ds}{s} \\ &\leq \frac{n2^{1+2n}}{n-1}\int_0^\infty s^{1/n}f^{**}(s)\frac{ds}{s} = \|f\|_{L(n,1)(\Omega)}. \end{aligned}$$

Isto prova o item $a)$.

Agora mostraremos a afirmação $i)$. Pelos itens $a)$ e $c)$ seguem

$$\|f_1^\flat\|_{L(n,1)(\Omega)} \leq c_0c_2\|M(|\nabla f|)\|_{L(n,1)(\Omega)} \leq c_0c_2\||\nabla f|\|_{L(n,1)(\Omega)} < \infty.$$

Assim, $f_1^\flat \in L(n,1)(\Omega)$ e isto prova a afirmação $i)$.

$ii)$ Afirmamos agora que f pode ser redefinida em um conjunto de medida nula tornando f contínua.

De fato, isto segue observando que, pelo **Corolário 2.3** com constante c, temos $f_1^\sharp(x) \leq cf_1^\flat(x)$ para todo $x \in R^n$; portanto, $f_1^\flat \in L(n,1)(\Omega)$ implica $f_1^\sharp \in L(n,1)(\Omega)$; e estamos nas condições do **Teorema 6.1**, donde segue a afirmação $ii)$.

A relação $|f(x+h) - f(x) - \nabla f(x).h| = o(|h|)$, quando $h \to 0$, reflete um comportamento local de f. Assim, consideraremos, sem perda de generalidade, Ω como sendo um cubo de R^n e f contínua em Ω.

O teorema ficará concluído ao mostrar que o *operador* Λ dado por

$$\Lambda f(x) := \limsup_{h\to 0}\frac{|f(x+h) - f(x) - h.\nabla f(x)|}{|h|}$$

é nulo quase sempre.

Para verificar isto, definimos outro *operador maximal* T em $L(n,1)(\Omega)$:

$$Tg(x) := \sup_{\Omega\supset Q\ni x}\frac{\|g\chi_Q\|_{L(n,1)(\Omega)}}{\|\chi_Q\|_{L(n,1)(\Omega)}} = \sup_{\Omega\supset Q\ni x}\frac{n-1}{n^2|Q|^{1/n}}\|g\chi_Q\|_{L(n,1)(\Omega)}.$$

Afirmamos que a segunda igualdade na definição acima segue ao calcular $\|\chi_Q\|_{L(n,1)(\Omega)}$.

De fato, pela **subseção 1.5.1**, temos

$$(\chi_Q)_*(\lambda) = |\{x \in R^n\,;\, \chi_Q(x) > \lambda\}| = |Q|\chi_{[0,1)}(\lambda) \quad \text{para todo } \lambda > 0.$$

Donde, por (**1.21**), segue

$$(\chi_Q)^*(s) = \inf\{\lambda\,;\, (\chi_Q)_*(\lambda) \leq s\} = \chi_{[0,|Q|)}(s) \quad \text{para todo } s \geq 0.$$

Logo, pela **Proposição 1.20** item $iii)$, seguem

$$\begin{aligned} \|\chi_Q\|_{L(n,1)(\Omega)} &= \frac{n}{n-1}\int_0^\infty s^{1/n}(\chi_Q)^*(s)\,\frac{ds}{s} = \frac{n}{n-1}\int_0^\infty s^{1/n}\chi_{[0,|Q|)}(s)\,\frac{ds}{s} \\ &= \frac{n}{n-1}\int_0^{|Q|} s^{\frac{1}{n}-1}\,ds = \frac{n^2}{n-1}|Q|^{1/n}. \end{aligned}$$

Isto finaliza a afirmação.

Como $f_1^\flat \in L(n,1)(\Omega)$, o valor $T(f_1^\flat)$ faz sentido. Relacionaremos, pontualmente, Λf e $T(f_1^\flat)$; mais precisamente, $\Lambda f(x) \leq cT(f_1^\flat)(x)$ para quase todo x de Ω e c é uma constante.

Lembramos que, conforme (**1.9**) e (**2.10**), quando $\alpha = 1$ tem-se, por definição, $k = (\alpha) = 0$ e $P_Q f = f_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q f$.

Fixemos um cubo qualquer $Q \subset \Omega$. Para dois outros cubos quaisquer Q_1 e Q_2 com $Q_2 \subset Q_1 \subset Q$ e cujo lado de $Q_1 \leq 2$ lado de Q_2, isto é, $|Q_1| \leq 2^n |Q_2|$ produzem

$$\begin{aligned} |f_{Q_1} - f_{Q_2}| &= \left| \frac{1}{|Q_2|}\int_{Q_2} f_{Q_1} - \frac{1}{|Q_2|}\int_{Q_2} f \right| \leq \frac{1}{|Q_2|}\int_{Q_2} |f_{Q_1} - f| \\ &\leq \frac{2^n}{|Q_1|}\int_{Q_1} |f_{Q_1} - f| \leq 2^n |Q_1|^{1/n} f_1^\flat(u) \quad \text{para todo } u \in Q_1 . \end{aligned}$$

Donde, tomando o ínfimo sobre Q_1 na relação acima e pelos argumentos utilizados para obter (**6.1**), seguem

$$|f_{Q_1} - f_{Q_2}| \leq 2^n |Q_1|^{1/n} \inf_{u \in Q_1} f_1^\flat(u) \leq 2^n |Q_1|^{1/n} (f_1^\flat)^{**}(|Q_1|) \leq 2^n \frac{2^{1/n}}{n(2^{1/n}-1)} \int_{|Q_1|/2}^{|Q_1|} [f_1^\flat \chi_Q]^{**}(s) s^{1/n} \frac{ds}{s} .$$

O mesmo argumento telescópico usado para obter (**6.2**) mostra que, existe uma constante c satisfazendo

$$|f(u) - f_Q| \leq 2^n c \int_0^{|Q|} [f_1^\flat \chi_Q]^{**}(s) s^{1/n} \frac{ds}{s} = 2^n c \|f_1^\flat \chi_Q\|_{L(n,1)(\Omega)} \quad \text{onde } u \in Q .$$

Portanto, dados x e h, podemos escolher um cubo Q, contendo x e $x+h$, com $|Q| \leq |h|^n$ (Para verificar isto basta tomar: lado de $Q =$ o maior comprimento das projeções do vetor h sobre os eixos cartesianos); este fato, a desigualdade acima e a definição de T produzem

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x)| &\leq 2^n c \|f_1^\flat \chi_Q\|_{L(n,1)(\Omega)} = 2^n c \frac{n^2}{n-1} |Q|^{1/n} \frac{n-1}{n^2 |Q|^{1/n}} \|f_1^\flat \chi_Q\|_{L(n,1)(\Omega)} \\ &\leq 2^n c \frac{n^2}{n-1} |h| T(f_1^\flat)(x) . \end{aligned}$$

Pelo item $b)$ com constante c_1 e tomando $k = 1$ no **Lema 4.3** item $ii)$ com constante c_2 tem-se,

$$|\nabla f(x)| \leq c_1 \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial}{\partial x_i}(x) \right| \leq c_1 \mathcal{D} f(x) \leq c_1 c_2 f_1^\flat(x) \leq c_1 c_2 T(f_1^\flat)(x) \quad \text{para quase todo } x \text{ em } \Omega .$$

Logo, comparando as duas desigualdades acima, quase todo x em Ω seguem

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x) - h.\nabla f(x)| &\leq |f(x+h) - f(x)| + |h||\nabla f(x)| \\ &\leq 2^n c \frac{n^2}{n-1} T(f_1^\flat)(x)|h| + c_1 c_2 T(f_1^\flat)(x)|h| \\ &\leq \max\{2^n c n^2/(n-1), c_1 c_2\} T(f_1^\flat)(x)|h| \end{aligned}$$

Assim, para quase todo x em Ω,

$$\frac{|f(x+h) - f(x) - h.\nabla f(x)|}{|h|} \leq \max\{2^n c n^2/(n-1), c_1 c_2\} T(f_1^\flat)(x) .$$

O lado direito da desigualdade acima independe de h. Tomando o $\limsup_{h \to 0}$ nesta desigualdade segue

$$\Lambda f(x) \leq \max\{2^n c n^2/(n-1), c_1 c_2\} T(f_1^\flat)(x) \quad \text{para quase todo } x \text{ em } \Omega . \tag{6.6}$$

Verificaremos que o operador sublinear T é *tipo fraco-restrito* (n,n) para todo $n \geq 1$.
De fato, seja E um conjunto qualquer de Ω e χ_E a função característica sobre E. Então

$$
\begin{aligned}
T(\chi_E) &= \sup_{\Omega \supset Q \ni x} \frac{\|\chi_E \chi_Q\|_{L(n,1)(\Omega)}}{\|\chi_Q\|_{L(n,1)(\Omega)}} = \sup_{\Omega \supset Q \ni x} \frac{\|\chi_{E \bigcap Q}\|_{L(n,1)(\Omega)}}{\|\chi_Q\|_{L(n,1)(\Omega)}} \\
&= \sup_{\Omega \supset Q \ni x} \frac{|E \cap Q|^{1/n}}{|Q|^{1/n}} = \left[\sup_{\Omega \supset Q \ni x} \frac{|E \cap Q|}{|Q|} \right]^{1/n} \\
&= \left(\sup_{R^n \supset Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q \chi_E \right)^{1/n} = [M(\chi_E)(x)]^{1/n}
\end{aligned}
$$

onde M é operador maximal de Hardy-Littlewood (para Ω).
Sabemos que M é um operador *tipo fraco* $(1,1)$. Para $n > 1$, *tipo fraco-restrito* implica *tipo fraco*; conforme Benedeck-Murphy-Panzone [1] e Stein-Weiss [2]; logo, T é *tipo fraco* $(1,1)$ para todo $n > 1$.
Portanto, para todo $t > 0$ tem-se, utilizando a imersão $L(n,1)(\Omega) \hookrightarrow L(n,n)(\Omega) = L^n(\Omega)$ para $n \geq 1$, **Proposição 1.15** item ii), (**1.28**) e (**6.6**) com constante c_0 e (**1.19**), seguem

$$
\begin{aligned}
t^{1/n}(\Lambda f)^*(t) &\leq \sup_{t \geq 0} t^{1/n}(\Lambda f)^*(t) \leq c_0 \sup_{t \geq 0} t^{1/n}(Tf_1^\flat)^*(t) = c_0 \sup_{\lambda > 0} (Tf_1^\flat)_*(\lambda)^{1/n}\lambda \\
&\leq c_0 \sup_{\lambda > 0} \lambda \left(\frac{\|Tf_1^\flat\|^n_{L^n(\Omega)}}{\lambda^n} \right)^{1/n} = c_0 c_1 \|f_1^\flat\|_{L^n(\Omega)} \\
&= c_0 c_1 \|f_1^\flat\|_{L(n,n)(\Omega)} \leq c_0 c_1 c_2 \|f_1^\flat\|_{L(n,1)(\Omega)}
\end{aligned}
$$

Pela relação acima e o item i) da demonstração da **Proposição 6.2**, seguem, para todo $t > 0$,

$$(\Lambda f)^*(t) \leq c_0 c_1 c_2 t^{-1/n} \|f_1^\flat\|_{L(n,1)(\Omega)} \leq c_0 c_1 c_2 c_3 t^{-1/n} \| \, |\nabla f| \, \|_{L(n,1)(\Omega)} .$$

Quando ϕ é uma função regular vale $\Lambda(f - \phi) = \Lambda(f)$; donde, pela relação acima,

$$(\Lambda f)^*(t) = (\Lambda(f-\phi))^*(t) \leq c_0 c_1 c_2 t^{-1/n} \|f_1^\flat\|_{L(n,1)(\Omega)} \leq c_0 c_1 c_2 c_3 t^{-1/n} \| \, |\nabla(f - \phi)| \, \|_{L(n,1)(\Omega)} .$$

Dado $\epsilon > 0$ arbitrário, existe uma função regular ϕ tal que $\| \, |\nabla(f-\phi)| \, \|_{L(n,1)(\Omega)} < \epsilon$.
Assim, $(\Lambda f)^*(t) < \epsilon$. Sendo $\epsilon > 0$ arbitrário, $(\Lambda f)^*(t) = 0$ para todo $t > 0$ e, pela **Proposição 1.12**, tem-se $\Lambda f = 0$ quase sempre. ■

6.3 A Imersão $C_p^\alpha(R^n) \hookrightarrow C_q^\beta(R^n)$

Nesta seção, a imersão de $C_p^\alpha(R^n)$ em $L^q(R^n)$ ou, mais geralmente, em $C_q^\beta(R^n)$, será dada a partir de uma desigualdade entre $f_\beta^\sharp$ e $f_\alpha^\sharp$ em termo do *Operador Potencial de Riesz* (isto é, operador integral fracionário). O caso $\beta = 0$ e $0 < \alpha < 1$ foi estudado por A. P. Calderón e R. Scott em [1]; a idéia aí utilizada serve para os outros casos, conforme DeVore-Sharpley [1].

6.3.1 Operador Potencial de Riesz

Para $0 < \gamma < n$, definimos o *operador potencial de Riesz* por

$$I_\gamma f(x) := \frac{\Gamma\left(\frac{n-\gamma}{2}\right)}{\pi^{n/2}2^\gamma\Gamma(\gamma/2)} \int_{R^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\gamma}}\,dy\,.$$

Para obter propriedades de $I_\gamma f$ precisaremos impor condições para a função f; por exemplo, f ser infinitamente diferenciável em R^n e possuir todas as derivadas limitadas quando multiplicadas por polinômios; conforme Stein [2]. Sugerimos também Bagby [1] e Stein [5]. Dentre as diversas propriedades para $I_\gamma f$ que podem ser encontradas em Stein [2] utilizaremos o fato de $I_\gamma f$ ser um operador *tipo* (p,q) para $1 < p < q < \infty$.

Teorema 6.4 . (Hardy-Littlewood-Sobolev)[58] *Sejam* $0 < \gamma < n$ *e* $1 < p < q < \infty$ *satisfazendo* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\gamma}{n}$. *Então existe uma constante c dependendo de p e q satisfazendo*

$$\|I_\gamma f\|_{L^q(\Omega)} \leq c\|f\|_{L^p(\Omega)} \qquad \textit{para toda função } f \in L^p(\Omega)\,.$$

Demonstração. Stein [2]. ■

No teorema acima, a hipótese $p > 1$ é essencial pois no caso $p = 1$, a aplicação $f \mapsto I_\gamma f$ é *tipo fraco* $(1,q)$ onde $\frac{1}{q} = 1 - \frac{\gamma}{n}, 1 < q < \infty$ e $0 < \gamma < n$; conforme Stein [2].

6.3.2 Dois Resultados em $L^1(R^n) + L^\infty(R^n)$

No restante desta seção consideraremos unicamente o caso $\Omega = R^n$ e $1 \leq p < \infty$, e eventualmente, $p = \infty$; isto estará incluído explicitamente nos enunciados.

Conforme a **seção 2.2**, o operador $\sharp$ está definido para funções em $L^1_{loc}(R^n)$. Sendo $L^1(R^n) + L^\infty(R^n) \subset L^1_{loc}(R^n)$ faz sentido aplicar o operador $\sharp$ às funções em $L^1(R^n) + L^\infty(R^n)$. A seguir apresentaremos dois resultados em $L^1(R^n) + L^\infty(R^n)$.

Fixados um cubo Q e num número real $\alpha > 0$, seja $P_Q := (P_{[\alpha]})_Q$ o operador projeção de grau $[\alpha]$ definido no **Capítulo 2**. Consideraremos também um número real β satisfazendo $0 \leq \beta < \alpha$; portanto, $[\beta] \leq [\alpha]$.

Seja $f \in L^1(R^n) + L^\infty(R^n)$. Pela segunda desigualdade da **Proposição 2.4** com constante c_0 segue uma cota superior para $f^\sharp_\beta(x)$ onde $x \in R^n$:

$$f^\sharp_\beta(x) \leq c_o \sup_{\Omega \supset Q \ni x} \frac{1}{|Q|^{1+\beta/n}} \int_Q |f - P_Q f| \tag{6.7}$$

Para continuar obtendo cotas superiores em (**6.7**) para $f^\sharp_\beta(x)$ consideremos qualquer cubo Q onde $x \in Q \subset \Omega$ e um número real r tal que $0 < r < n/(\alpha-\beta)$. Definimos $\gamma := r(\alpha-\beta) < n$. Quando $x, y \in Q$ vale $|x-y| \leq$ diâmetro do cubo $Q = n^{1/2}|Q|^{1/n}$. Assim, para todo $u \in Q$,

$$\frac{1}{|Q|^{\beta/n}} \cdot \frac{1}{|Q|} \int_Q |f - P_Q f| \leq \frac{1}{|Q|^{\beta/n}} \cdot |Q|^{\alpha/n} \left(\frac{1}{|Q|^{1+\alpha/n}} \int_Q |f - P_Q f| \right) \leq |Q|^{(\alpha-\beta)/n} f^\sharp_\alpha(u)\,.$$

Tomando o ínfimo sobre Q na relação acima segue:

$$\frac{1}{|Q|^{1+\beta/n}} \int_Q |f - P_Q f| \leq |Q|^{(\alpha-\beta)/n} \inf_{u \in Q} f^\sharp_\alpha(u)\,. \tag{6.8}$$

[58] Este teorema, em relação ao espaço de Lorentz, diz que I_α é um operador contínuo de $L(p,r)$ em $L(q,r)$ onde $0 < \gamma < n$ e $1 < p < q < \infty$ satisfazendo $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\gamma}{n}$ e $1 \leq r \leq \infty$; e também de $L(n/\alpha, 1)$ em L^∞; conforme Bagby [1].

Mas,

$$\left[\int_Q [f_\alpha^\sharp(y)]^r\, dy\right]^{1/r} \geq |Q|^{1/r} \inf_{u\in Q} f_\alpha^\sharp(u)\,. \tag{6.9}$$

Assim, por (**6.8**) e (**6.9**), podemos escrever

$$\frac{1}{|Q|^{\beta/n}}\cdot\frac{1}{|Q|}\int_Q |f-P_Qf| \leq |Q|^{\frac{1}{r}(\frac{\gamma}{n}-1)}\left[\int_Q f_\alpha^\sharp(y)^r\, dy\right]^{1/r} \leq \left\{n^{(n-\gamma)/2}\int_Q f_\alpha^\sharp(y)^r\cdot\frac{1}{|x-y|^{n-\gamma}}\, dy\right\}^{1/r}. \tag{6.10}$$

A seguir relacionaremos $f_\beta^\sharp$ com operador I_γ.
Juntando (**6.7**) e (**6.10**) temos

$$f_\beta^\sharp(x) \leq c_0 c_1 n^{(n-\gamma)/(2r)}\{I_\gamma[f_\beta^\sharp(x)]^r\}^{1/r} \tag{6.11}$$

para todo $x \in R^n$ e onde $c_1 = [\Gamma(\frac{n-\gamma}{2})]^{1/r}$.

A desigualdade (**6.11**) juntamente com a propriedade de I_γ dada no **Teorema 6.4** produzem o próximo resultado que terá como conseqüência a imersão $C_p^\alpha(R^n) \hookrightarrow C_q^\beta(R^n)$.

Teorema 6.5 . *Seja $\Omega = R^n$. Para $0 \leq \beta \leq \alpha < \infty, 1 \leq p \leq q < \infty, \frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{(\alpha-\beta)}{n}$ e $f \in L^1(R^n) + L^\infty(R^n)$ vale*

$$\|f_\beta^\sharp\|_{L^q(R^n)} \leq c\|f_\alpha^\sharp\|_{L^p(R^n)}$$

onde c é uma constante independente de f.

Demonstração . Vejamos o caso $\beta = \alpha$. Esta igualdade implica $p = q$; então o teorema vale bastando tomar $c \geq 1$. No caso $\beta < \alpha$ precisamos fixar um número real r satisfazendo $0 < r < \min\{p, n/(\alpha-\beta)\}$ para obter $\frac{r}{p} = \frac{r}{q} + \frac{r(\alpha-\beta)}{n} = \frac{r}{q} + \frac{\gamma}{n}$ onde $\gamma := r(\alpha-\beta) \neq 0$. Donde $\frac{r}{q} = \frac{r}{p} - \frac{\gamma}{n}$.

Definimos $p_0 := \frac{p}{r} > 1$ e $q_0 := \frac{q}{r} > p_0$. Agora utilizaremos a hipótese da finitude de q no seguinte argumento: conforme o **Teorema 6.4**, a limitação do operador I_γ é válida para q_0 finito. (q_0 é finito pois $rq_0 = q < \infty$.)

Para simplificar a notação nesta demonstração poremos $g := I_\gamma[f_\beta^\sharp]^r$.

Logo, pelo **Teorema 6.4**, (**6.11**) fica

$$\begin{aligned}\|f_\beta^\sharp\|_{L^q(R^n)} &\leq c_0 n^{(n-\gamma)/2}\|g^{1/r}\|_{L^q(R^n)} = c_0 n^{(n-\gamma)/2}\|g\|_{L^{q_0}(R^n)}^{1/r} \\ &\leq c_1 c_0 n^{(n-\gamma)/2}\|(f_\alpha^\sharp)^r\|_{L^{p_0}(R^n)}^{1/r} = c_1 c_0 n^{(n-\gamma)/2}\|f_\alpha^\sharp\|_{L^p(R^n)}\,.\end{aligned}$$

Isto mostra o teorema. ■

O **Teorema 6.5** considera somente o caso q finito. Para $q = \infty$ temos o

Teorema 6.6 . *Seja $\Omega = R^n$. Para $1 \leq p \leq \infty, \beta \geq 0, \alpha = \beta + \frac{n}{p}$ e $f \in L^1(R^n) + L^\infty(R^n)$ vale*

$$\|f_\beta^\sharp\|_{L^\infty(R^n)} \leq \|f_\alpha^\sharp\|_{L(p,\infty)(R^n)}\,.$$

Demonstração . Alternativamente, a desigualdade em (**6.8**) prossegue utilizando (**3.19**) e a definição da norma $\|.\|_{L(p,\infty)(R^n)}$ dada na **subseção 1.5.4**, para obter

$$\frac{1}{|Q|^{1+\beta/n}}\int_Q |f-P_Qf| \leq |Q|^{(\alpha-\beta)/n}\inf_{u\in Q} f_\alpha^\sharp(u) \leq |Q|^{1/p}(f_\alpha^\sharp)^{**}(|Q|) \leq \|f_\alpha^\sharp\|_{L(p,\infty)(R^n)}\,.$$

O lado direito da relação acima independe do cubo Q. Basta tomar o supremo sobre todos os cubos Q contendo x e a seguir a norma $\|.\|_{L^\infty(R^n)}$ para finalizar o teorema. ■

6.3.3 A Imersão $C_p^\alpha(R^n) \hookrightarrow C_q^0(R^n)$

No **Capítulo 4** definimos o espaço $C_p^0(\Omega)$ como sendo igual a $L^p(\Omega)$ se $1 \le p < \infty$ e igual a $BMO(\Omega)$ se $p = \infty$.

Para $\beta = 0$ apresentaremos uma versão do **Teorema 6.5** que inclui o caso q finito ou não.

Mas antes observamos que nos **Teoremas 6.5** e **6.6** a função f deve pertencer a $L^1(R^n)+L^\infty(R^n)$. Como $L^p(R^n) \subseteq L^1(R^n)+L^\infty(R^n)$ para $1 \le p \le \infty$, esses dois teoremas também valem para funções em $L^p(R^n)$ para $1 \le p \le \infty$ e serão utilizados para provar os dois resultados a seguir.

Teorema 6.7 . *Seja $\Omega = R^n$. Para $0 \le p \le q < \infty$ e $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ (isto é, $\alpha = n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$) existe uma constante c independente da função $f \in C_p^\alpha(R^n)$ tal que*

$$\|f\|_{C_q^0(R^n)} \le c\|f\|_{C_p^\alpha(R^n)}.$$

Demonstração . Primeiramente suponhamos q infinito. A relação $f \in C_p^\alpha(R^n)$ equivale, pela definição dada em (**2.36**), $f \in L^p(R^n) \subseteq L^1(R^n) + L^\infty(R^n)$ e $f_\alpha^\sharp \in L^p(R^n) = L(p,p)(R^n) \subset L(p,\infty)(R^n)$ (esta igualdade e a inclusão podem ser visto na **subseção 1.5.4**.)

Donde, pelo **Teorema 6.5** com $\beta = 0$ temos, $f_0^\sharp \in L^\infty(R^n)$ pois

$$\|f_0^\sharp\|_{L^\infty(R^n)} \le \|f_\alpha^\sharp\|_{L(p,\infty)(R^n)} \le c_1\|f_\alpha^\sharp\|_{L(p,p)(R^n)} \le c_1\|f_\alpha^\sharp\|_{L^p(R^n)} < \infty.$$

Valendo a igualdade em $C_\infty^0(R^n) = BMO$ (neste ponto, sugerimos ao leitor uma olhada na observação dada após o **Teorema 4.9**) e pela relação acima,

$$\begin{aligned}\|f\|_{C_q^0(R^n)} &= \|f\|_{BMO} = \|f_0^\sharp\|_{L^\infty(R^n)} \le \|f\|_{L^p(R^n)} + c_1\|f_\alpha^\sharp\|_{L^p(R^n)} \\ &= \max\{1, c_1\}[\|f\|_{L^p(R^n)} + \|f_\alpha^\sharp\|_{L^p(R^n)}] = \max\{1, c_1\}\|f\|_{C_p^\alpha(R^n)}.\end{aligned}$$

Quando q for finito, o **Teorema 6.5** com $\beta = 0$ fornece $\|f_0^\sharp\|_{L^q(R^n)} \le c_2\|f_\alpha^\sharp\|_{L^p(R^n)}$.

Valendo a igualdade em $C_q^0(R^n) = L^q(R^n)$ e observando que a primeira desigualdade do **Teorema 4.9** é válida para $1 \le p \le \infty$, tem-se

$$\begin{aligned}\|f\|_{C_q^0(R^n)} &= \|f\|_{L^q(R^n)} \le \frac{p8^{n+1}}{\log 2}\|f_0^\sharp\|_{L^q(R^n)} \\ &\le \|f\|_{L^p(R^n)} + c_2\frac{p8^{n+1}}{\log 2}\|f_\alpha^\sharp\|_{L^p(R^n)} \le \max\left\{1, c_2\frac{p8^{n+1}}{\log 2}\right\}\|f\|_{C_p^\alpha(R^n)}.\end{aligned}$$

Isto prova o teorema. ■

O próximo problema é relacionar $C_p^\alpha(R^n)$ para diferentes valores de α e p.

Mais precisamente, fixados $\alpha \ge 0$ e $1 \le p \le \infty$, determinaremos a região do plano onde variam β e q (ou seja, o conjunto dos pares $(1/q, \beta)$) onde vale a imersão $C_p^\alpha(R^n) \hookrightarrow C_q^\beta(R^n)$.

Teorema 6.8 . *Seja $\Omega = R^n$. Para $1 \le p \le q \le \infty$ e $0 \le \beta \le \alpha + n\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)$ tem-se*

$$C_p^\alpha(R^n) \hookrightarrow C_q^\beta(R^n).$$

Demonstração. O caso $p = q$ é exatamente o **Lema 4.8** agora incluído o caso $\beta = 0$ (devido ao **Teorema 6.7**). Caso contrário, se $p < q$, será suficiente mostrar o teorema no caso onde α e β satisfazem a igualdade $\beta = \alpha + n\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)$. De fato, suponhamos que neste caso aconteça: $C_p^\alpha(R^n) \hookrightarrow C_q^\beta(R^n)$. Por outro lado, para $\beta' < \beta$ utilizaremos novamente o **Lema 4.8** em relação a

q fixo para obter $C_q^\beta(R^n) \hookrightarrow C_q^{\beta'}(R^n)$. Pela transitividade das imersões segue $C_p^\alpha(R^n) \hookrightarrow C_q^{\beta'}(R^n)$. Agora, basta renomear β' como sendo β. E isto mostra a afirmação.

Mostraremos que o teorema vale quando ocorre a igualdade $\beta = \alpha + n\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)$. Se $\beta = \alpha$ temos $p = q$ que é o caso analisado inicialmente. Assim, podemos supor $\beta < \alpha$. Definimos $\frac{1}{q_0} := \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. Consideremos dois subcasos: q_0 não negativo e q_0 negativo.

Se $q_0 \geq 0$ então $p \leq q_0$ (pois $\frac{1}{q_0} := \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n} \leq \frac{1}{p}$) e podemos escrever $\alpha = n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q_0}\right)$. Estas são as hipóteses do **Teorema 6.7**. Logo, $C_p^\alpha(R^n) \hookrightarrow C_{q_0}^0(R^n) = L^{q_0}(R^n)$.

Pela definição de $C_p^\alpha(R^n)$ dada por (**2.38**) temos $C_p^\alpha(R^n) \hookrightarrow L^p(R^n)$.

Por outro lado, se $q_0 \geq 0$ também temos $p \leq q \leq q_0$ (pois $0 \leq \beta = \alpha + n\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right) = \alpha + n\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q_0} - \frac{\alpha}{n}\right) = n\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q_0}\right)$) . Logo, $L^{q_0}(R^n) \bigcap L^p(R^n) \hookrightarrow L^q(R^n)$.

Assim, pelos resultados dos três parágrafos acima,

$$C_p^\alpha(R^n) \hookrightarrow L^{q_0}(R^n) \bigcap L^p(R^n) \hookrightarrow L^q(R^n),$$

isto é, existe uma constante c_0 tal que

$$\|f\|_{L^q(R^n)} \leq c_0 \|f\|_{C_p^\alpha(R^n)}. \tag{6.12}$$

Reescrevendo $\beta = \alpha + n\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)$ como $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{(\alpha-\beta)}{n}$ podemos utilizar o **Teorema 6.5** com constante c_1 para obter $\|f_\beta^\sharp\|_{L^q(R^n)} \leq c_1 \|f_\alpha^\sharp\|_{L^p(R^n)}$. Assim, esta desigualdade, (**6.12**), (**2.37**) e (**2.38**) produzem

$$\begin{aligned} \|f\|_{C_q^\beta(R^n)} &= \|f\|_{L^q(R^n)} + \|f_\beta^\sharp\|_{L^q(R^n)} \leq \|f\|_{L^q(R^n)} + c_1 \|f_\alpha^\sharp\|_{L^p(R^n)} \\ &\leq c_0 \|f\|_{C_p^\alpha(R^n)} + c_1 \|f\|_{C_p^\alpha(R^n)} = (c_0 + c_1) \|f\|_{C_p^\alpha(R^n)}. \end{aligned}$$

Donde segue a imersão do teorema quando q_0 é ≥ 0.

Se q_0 é negativo então $\frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ também é negativo, isto é, $p > n/\alpha$ para $\alpha > 0$. Neste caso, afirmamos:

i) $f_\alpha^\sharp \in L^p(R^n)$ implica $f_{\alpha,Q}^\sharp \in L(n/\alpha, p)(Q)$ para cada cubo Q, onde $f_{\alpha,Q}^\sharp$ e $f_\alpha^\sharp$ são restrições da função $f_{\alpha,\Omega}^\sharp$ onde $\Omega = Q$ ou $\Omega = R^n$ (definida em (**2.20**), respectivamente.

De fato, utilizando duas vezes a relação $p > n/\alpha$, obtermos as imersões

$$L^p(R^n) \hookrightarrow L^p(Q) \hookrightarrow L^{n/\alpha}(Q) = L(n/\alpha, n/\alpha)(Q) \hookrightarrow L(n/\alpha, p)(Q).$$

(A finitude do volume do cubo Q somente foi utilizada na segunda imersão acima.)

Portanto. existe uma constante c_2 tal que

$$\|f_{\alpha,Q}^\sharp\|_{L(n/\alpha,p)(Q)} \leq c_2 \|f_\alpha^\sharp\|_{L^p(R^n)}. \tag{6.13}$$

Aplicando o **Teorema 6.1**, a função f pode ser redefinida em um conjunto de medida zero tal que seja contínua no cubo Q e existe um polinômio $P_Q f$ satisfazendo

$$\|f - P_Q f\|_{C(Q)} \leq c_3 \|f_{\alpha,Q}^\sharp\|_{L(n/\alpha,1)(Q)}.$$

Por outro lado, para o cubo Q a desigualdade da **Proposição 2.2** item *i*) com constante c_4 implica

$$\|P_Q f\|_{C(Q)} \leq c_4 \|f\|_{L^p(Q)} \leq c_4 \|f\|_{L^p(R^n)}.$$

A desigualdade triangular, os dois resultados acima e (**6.13**) produzem

$$\begin{aligned}
\|f\|_{C(Q)} &\leq \|f - P_Q f\|_{C(Q)} + \|P_Q f\|_{C(Q)} \leq c_3 \|f^{\sharp}_{\alpha,Q}\|_{L(n/\alpha,1)(Q)} + c_4 \|f\|_{L^p(R^n)} \\
&\leq c_2 c_3 \|f^{\sharp}_{\alpha}\|_{L^p(R^n)} + c_4 \|f\|_{L^p(R^n)} \leq \max\{c_2c_3, c_4\}[\|f^{\sharp}_{\alpha}\|_{L^p(R^n)} + \|f\|_{L^p(R^n)}] \\
&= \max\{c_2c_3, c_4\}\|f\|_{C^{\alpha}_p(R^n)}.
\end{aligned}$$

Sendo Q um cubo arbitrário e o lado direito da desigualdade acima não depender de Q tem-se

$$\|f\|_{C(R^n)} \leq \max\{c_2c_3, c_4\}\|f\|_{C^{\alpha}_p(R^n)}.$$

Donde resulta que $f \in C(R^n) \bigcap L^p(R^n) \subset L^q(R^n)$ para todo $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Em particular, existe uma constante c_5 tal que

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^q(R^n)} &\leq c_5 \|f\|_{C(R^n)\bigcap L^p(R^n)} = c_5 \max\{\|f\|_{C(R^n)}, \|f\|_{L^p(R^n)}\} \\
&\leq c_5[\|f\|_{C(R^n)} + \|f\|_{L^p(R^n)}] \leq c_5[\max\{c_2c_3, c_4\}\|f\|_{C^{\alpha}_p(R^n)} + \|f\|_{C^{\alpha}_p(R^n)}] \\
&= c_5[\max\{c_2c_3, c_4\} + 1]\|f\|_{C^{\alpha}_p(R^n)}.
\end{aligned}$$

Continuando com o caso q_0 negativo, analisaremos como o teorema decorre se q é finito ou infinito. Quando $q < \infty$ utilizamos o **Teorema 6.5** com constante c_6 para obter

$$\begin{aligned}
\|f\|_{C^{\beta}_q(R^n)} &= \|f\|_{L^q(R^n)} + \|f^{\sharp}_{\beta}\|_{L^q(R^n)} \leq c_5[\max\{c_2c_3, c_4\} + 1]\|f\|_{C^{\alpha}_p(R^n)} + c_6\|f^{\sharp}_{\alpha}\|_{L^p(R^n)} \\
&\leq c_5[\max\{c_2c_3, c_4\} + 1]\|f\|_{C^{\alpha}_p(R^n)} + c_6\|f\|_{C^{\alpha}_p(R^n)} \\
&= (c_5[\max\{c_2c_3, c_4\} + 1] + c_6)\|f\|_{C^{\alpha}_p(R^n)}.
\end{aligned}$$

Donde segue o teorema no caso $q < \infty$.
Se $q = \infty$ utilizaremos o **Teorema 6.6** com constante c_7 para obter

$$\begin{aligned}
\|f\|_{C^{\beta}_{\infty}(R^n)} &= \|f\|_{L^{\infty}(R^n)} + \|f^{\sharp}_{\beta}\|_{L^{\infty}(R^n)} \leq \max\{c_2c_3, c_4\}\|f\|_{C^{\alpha}_p(R^n)} + c_7\|f^{\sharp}_{\alpha}\|_{L(p,\infty)(R^n)} \\
&\leq \max\{c_2c_3, c_4\}\|f\|_{C^{\alpha}_p(R^n)} + c_7c_8\|f^{\sharp}_{\alpha}\|_{L(p,p)(R^n)} \\
&= \max\{c_2c_3, c_4\}\|f\|_{C^{\alpha}_p(R^n)} + c_7c_8\|f^{\sharp}_{\alpha}\|_{L^p(R^n)} \\
&\leq \max\{c_2c_3, c_4\}\|f\|_{C^{\alpha}_p(R^n)} + c_7c_8\|f\|_{C^{\alpha}_p(R^n)} \\
&= (c_7c_8 + \max\{c_2c_3, c_4\})\|f\|_{C^{\alpha}_p(R^n)}.
\end{aligned}$$

Donde segue o teorema no caso $q = \infty$. ■

Referências

Adams, R. A.
[1] *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

Bagby, R. J.
[1] *Riesz potentials and Fourier multipliers*, Proc. Symp. in Pure Math. 35(1) (1979), 115-119.
[2] *Maximal functions and rearrangements: some new proofs*, Indiana Univ. Math. J. 32(6) 1983, 879-891.

Batemann, P. & Diamond, H.
[1] *John E. Littlewood (1885-1977): a informal obtuary*, The Math. Intelligencer, 1(1) (1978), 28-33.

Benedeck, I.L., Murphy, E.R. & Panzone, R.
[1] *Cuestiones del analisis de Fourier: convergência em media de algunas séries ortogonales*, Notas de algebra y analisis 5, Universidad Nacional del Sur, Bahia Blanca, Argentina, 1976.

Bennett, C.
[1] *Intermediate spaces and the class L $\log^+$ L*, Arkiv for Matematick, Institut Mittag-Leffler, Sweeden, 11(1973), 215-228.

Bennett, R. & Sharpley, R.C.
[1] *Weak type inequalities for H^p and BMO*, Proc. Symp. in Pure Math. 35(1)(1979), 201-229.
[2] *Interpolation of Operators*, Academic Press, New York, 1988.

Bergh, J.
[1] *Hardy's inequality - a complement*, Mathematische Zeitschrift 202(1989), 147-149.

Bergh, J. & Löfströn, J.
[1] *Interpolation Spaces. An Introduction*, Springer Verlag, New York, 1976.

Boas. R.P.
[1] *Extremal problems for polynomials*, Amer. Math. Soc. 85(1978), 473-475.

Bojarski, B.
[1] *Sharp maximal operator of fractional order and Sobolev imbedding inequalities*, Bull. Polish Acad. Sc. Math. 33(1985), 7-16.
[2] *Remarks on Markov's inequalities and some properties of polynomials*, Bull. Polish Acad. Sc. 33(1985), 355-364.

Butzer, P.L. & Berens, H.
[1] *Semi-Groups of Operators and Approximation*, Springer-Verlag, New York, 1967.

Calderón, A.P.
[1] *Lebesgue spaces of differentiable funtions and distributions*, Amer. Math. Soc. Proc. of Symposia in Pure Math. 4(1961), 33-49.
[2] *Spaces between L^1 and L^∞ and the theorem of Marcinkiewicz*, Studia Math. 26(1966), 273-299.
[3] *Estimates for singular integral operator in terms of maximal funtions*, Studia Math. 44(1972), 167-186.

Carleson, L.
[1] *BMO - 10 year's*, Progress in Math. 11(1981), Birkhauser, Boston, in 18th Scandinavian Congress of Math. Proc. (1980), editores: J.Coates e S.Helgason.

Cheney, E.W.
[1] *Introduction to Approximation Theory*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1966.

Ciesielski, K.
[1] *How good is Lebesgue measure ?*, The Math. Intelligencer 11(2)(1989), 54-58.

Cotlar, M. & Cignoli, R.
[1] *An Introduction to Functional Analysis*, North-Holland Texts in Advanced Math., North-Holland, Amsterdan, 1974.

Darst, R.B.
[1] *The connection between* lim sup *and uniform integrability*, Amer. Math. Soc. 87(4)(1980), 285-286.

Davis, P.J.
[1] *Interpolation and Approximation*, Dover, New York, 1975.

DeVore, R.A.
[1] *The K functional for* (H_1, BMO), Lecture Notes in Math. 1070, Interpolation spaces and allied topics in analysis, Springer-Verlag, (1984), 66-70.

DeVore, R.A. & Scherer, K.
[1] *Interpolation of linear operators on Sobolev spaces*, Ann. of Math. 109(1979), 583-599.

DeVore, R.A. & Sharpley, R.C.
[1] *Maximal functions mesuring smoothness*, Mem. Amer. Math. Soc. 193, Providence, 1984.

Fefferman, C.
[1] *Characterizations of bounded mean oscilattion*, Bull. Amer. Math. Soc. 77(1971), 587-588.

Fefferman, C. & Stein, E.M.
[1] H^p *spaces of several variables*, Acta Math. 129(1972), 137-193.

Fefferman, R.
[1] *Covering lemmas, maximal functions and multiplier operators in Fourier analysis*, Proc. Symp. in Pure Math. 35(1)(1979), 51-60.

Fisher, J.C. & Shilleto, J.
[1] *Three aspects of Fubini's theorem*, Math. Magazine 59(1986), 40-42.

Francia, J.-L. R. de
[1] *Some maximal inequalities*, Recent Progress in Fourier Analysis, Math. Studies 111, North-Holland, 1985, 203-214.

Grinberg, E.L.
[1] *On the smoothness hipothesis in Sard's theorem*, Amer. Math. Soc. 92(10)(1985), 733-734.

Guzmán, M.de
[1] *Differentiation of Integrals in* R^n, Lecture Notes in Mathematics 481, Springer-Verlag, 1971.
[2] *An inequality for the Hardy-Littlewood maximal operator with respect to produt of differentiation bases*, Studia Math. 49(1972), 185-194.
[3] *Besicovitch theory of linearly mesurable sets and Fourier analysis*, Proc. Symp. in Pure Math. 35(1)(1979), 61-67.
[4] *A change-of-variables formula without continuity*, Amer. Math. Soc. 87(9)(1980), 736-739.
[5] *Real Variable Methods in Fourier Analysis*, Studies Mathematics 46, North-Holland, Amsterdam, 1981.

Hardy, G.H., Littlewood, J.E. & Pólya, G.
[1] *Inequalities*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1952, 2.a edição.

Henry, M.S.
[1] *Approximation by polynomials: interpolation and optimal nodes*, Amer. Math. Soc. 91(8)(1984), 497-499.

Huber, G.
[1] *Gamma function derivation of n-sphere volumes*, Amer. Math. Soc. 89(5)(1982), 301-302,

Hudson, S.M.
[1] *A covering lemma for maximal operators with unbounded kernels*, Michigan Math. J. 34(1987), 147-151.

Hunt, R.A.
[1] *On $L(p,q)$ spaces*, L'Enseignement Math. 12(2)(1966), 247-275.

Imoru, C.O.
[1] *Generalizations of Hardy's integral inequality*, Jour. of Math. Analysis and Appl. 122(1987), 7-15.

Johnen, H. & Scherer, K.
[1] *On the equivalence of the K-functional and moduli of continuity and some applications*, Lecture Note in Math. 571(1976), 119-140, Springer-Verlag.

Journe, L.
[1] *Calderón-Zygmund Operators, Pseudo-Differential Operators and the Cauchy Integral of Calderón*, Lectures Notes in Mathematics 994, Springer-Verlag, 1983.

Kahane, C.S.
[1] *A note on the maximal function*, Math. Japonica 37(2)(1992), 209-212.

Katz, V.J.
[1] *Change of variables in multiple integrals: Euler to Cartan*, Math. Magazine 55(1)(1982), 3-11.

Klei, H.-A. & Miyara, M.
[1] *Une extension du lemme de Fatou*, Bull. Sc. Math. 2.a série, 115(1991), 211-222.

Kolmogorov, A.N. & Fomin, S.V.
[1] *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*, Mir, Moscou, 1966, 2.a edição.

Laugwitz, D. & Rodewald, B.
[1] *A simple characterization of the gamma function*, Amer. Math. Soc. 98(6)(1987), 534-536.

Levasseur, K.M.
[1] *A probabilistic proof of the Weierstrass approximation theorem*, Amer. Math. Soc. 91(4)(1984), 249-250.

Lindsey II, J.H.
[1] *A simple proof of the Weierstrass approximation theorem*, Amer. Math. Soc. 98(5)(1991), 429-430.

Lizorkin, P.I.
[1] *The behavior at infinity of Liouville classes on Riesz potentials of arbitrary order*, Proceedings of the Steklov Institute of Math., editado por Amer. Math. Soc. 4(1981), 185-209.

Lorentz, G.G.
[1] *Approximation of Funtions*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1966.

Maz'ja, V.G.
[1] *Sobolev Spaces*, Springer-Verlag, 1985.

Merucci, C.

[1] *Applications of interpolation with a function parameter to Lorentz, Sobolev and Besov spaces*, Lectures Notes in Math. 1070, Interpolation spaces and allied topics in analysis, Springer-Verlag, 1984.

Miamee, A.G.

[1] *The inclusion $L^p(\mu) \subseteq L^q(\nu)$*, Amer. Math. Soc. 98(4)(1991), 342-345.

Oklander. E.T.

[1] *Interpolacion, Espacios de Lorentz y Teorema de Marcinkiewicz*, Cursos y Sem. Mat. 20, Univ. Buenos Aires, Argentina, 1965.

Okikiolu, G.O.

[1] *Aspects of the Theory of Bounded Integral Operators in L^p-spaces*, Academic Press, New York, 1971.

Pachpatte, B.G.

[1] *On some variants of Hardy's inequality*, Journ. of Math. Analysis and Appl., 124(1987), 495-501.

Phillips, K.

[1] *The maximal theorems of Hardy and Littlewood*, The Amer. Monthly, (1967), 648-660.

Pichorides, S.K.

[1] *On the best values of the constants in the theorems of M. Riesz, Zygmund and Kolmogorov*, Studia Math. 44(1972), 165-179.

Privalov, A.A.

[1] *An analogue of A.A.Markov's Inequality. Aplication to Interpolation and Fourier Series*, Proc. of the Steklov Inst. of Math. 2(1985), 161-174, editado por Amer. Math. Soc.

Pursell, L. & Trimble, S.Y.

[1] *Gram-Schmidt orthogonalization by Gauss elimination*, Amer. Math. Soc. 98(6)(1991), 544-549.

Sadosky, C.

[1] *Interpolation of Operators and Singular Integrals: an Introduction to Harmonic Analysis*, Marcel Dekker, New York, 1979.

Sharpley, R. & Shim, Y.

[1] *Singular integrals on C_p^α*, Studia Math 92(1986), 285-293.

Singer, I.

[1] *Best approximation in normed linear spaces by elements of linear subspaces*, Springer-Verlag, 1970.

Stein, E.M.

[1] *Singular integrals, harmonic functions and differentiability properties of functions*, Proc. Sympos. Pure Math. 10(1967), 316-335.

[2] *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1970.

[3] *The differentiability of functions in R^n*, Ann. of Math. 113(1981), 383-385.

[4] *The development of square funtions in the work of A.Zygmund*, Bull. (new series) Amer. Math. Soc. 7(1982), 359-376.

[5] *Some results in harmonic analysis in R^n, for $n \to \infty$*, Bull. (new series) Amer. Math. Soc. 9(1983), 71-73.

[6] *Three variants on the theme of maximal functions*, Recent Progress in Fourier Analysis, Math. Studies 111, North-Holland, 229-244, 1985.

Stein, E.M. & Strömberg, J.O.

[1] *Behavior of maximal funtions in R^n, for large n*, Arkiv for Matematick, Inst. Mittag-Leffler, Sweeden, 21(2)(1983), 259-269.

Stein. E.M. & Wainger, S.

[1] *Problems in harmonic analysis related to curvature*, Bull. of the Math. Soc. 84(6)(1978), 1239-1295

Stein, E.M. & Weiss, G.

[1] *Introduction to Fourier Analysis in Euclidean Spaces*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1971. .

Strömberg, J.O. & Torchinsky, A.

[1] *Wheighted Hardy Spaces*, Lecture Notes in Math. 1381, Springer-Verlag, 1989.

Torchinsky, A.

[1] *Real-Variable Methods in Harmonic Analysis*, Academic Press, New York, 1986.

Varian, H.R.

[1] *Microeconomic Analysis*, W.W. Norton & Company, Inc. 1984, 2.a edição.

Villani, A.

[1] *Another note on the inclusion* $L^p(\mu) \subset L^q(\nu)$, Amer. Math. Soc. 92(7)(1985), 485-487.

[2] *On the equality* $L^1(\mu) = L^1_{loc}(\mu)$, Amer. Math. Soc. 98(9)(1991), 826-828.

Wallin, H.

[1] *New and old functions spaces*, Function Spaces and Applications, Lecture Notes in Math. 1302(1988), 99-114, Springer-Verlag.

Wheeden, R.L. & Zygmund, A.

[1] *Measure and Integral. Introduction to Real Analysis*, Monographs and Texbooks in Pure and Applied Math., Marcel Dekker Inc., New York, 1977.

Zygmund, A.

[1] *Trigonometrical series*, Cambridge Univ. Pres, 2.a edição, 1968.

[2] *Notes on the history of Fourier series*, Studies in Math. Series, Studies in Harmonic Analysis 13, editor: J.M. Asch, The Math. Assoc. of Am. 19.

[3] *Stanislaw Saks, 1897-1942*, translated by C.Atkin, The Math. Intellingencer 9(1)(1987), 36-43.